

CH. BIEHLER

Sur les séries

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 243-251

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__243_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES SÉRIES;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Si l'on a une série à termes positifs

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

cette série sera divergente si l'on peut trouver une fonction $\varphi(n)$, telle que $u_n \varphi(n)$ ait pour limite une quantité λ différente de zéro, la fonction $\varphi(n)$ remplissant en outre la condition que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit une série divergente.

La série

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

sera au contraire convergente, si l'on peut trouver une fonction $\varphi(n)$, telle que $u_n \varphi(n)$ ait pour limite une quantité finie λ , et telle que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit convergente.

Dans le premier cas, $u_n \varphi(n)$ peut croître au delà de toute limite; dans le second cas, λ peut avoir pour limite zéro : le théorème est encore vrai; la démonstration que nous allons en donner le montre d'une manière évidente.

2. Supposons d'abord que $u_n \varphi(n)$ n'ait pas pour limite zéro, et que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit divergente.

On pourra toujours trouver un nombre μ supérieur à zéro, tel que, pour une certaine valeur de n et pour toute valeur plus grande, $u_n \varphi(n)$ soit plus grand que μ ;

on aura donc, à partir de cette valeur,

$$\begin{aligned} u_n \varphi(n) &> \mu, \\ u_{n+1} \varphi(n+1) &> \mu, \\ &\dots\dots\dots, \\ u_{n+p} \varphi(n+p) &> \mu; \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} &u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p} \\ &> \mu \left[\frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \dots + \frac{1}{\varphi(n+p)} \right]; \end{aligned}$$

la quantité entre parenthèses augmente indéfiniment quand p croît lui-même indéfiniment; par suite,

$$u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p} + \dots$$

est divergente.

On sait que la série harmonique est divergente; on en conclut que les séries $\sum \frac{f(n)}{F(n)}$, où le degré du dénominateur ne surpasse pas de plus d'une unité celui du numérateur, sont des séries divergentes; dans ce cas, $\varphi(n) = n$ et $n \frac{f(n)}{F(n)}$, dans les hypothèses faites, est une fonction qui, pour n infini, a pour limite une quantité finie, ou augmente indéfiniment : la série $\sum \frac{f(n)}{F(n)}$ est donc divergente.

Il en est de même des séries $\sum \frac{1}{(Ln)^\mu}$; en posant $u_n = \frac{1}{(Ln)^\mu}$, la fonction nu_n croît au delà de toute limite quand n augmente indéfiniment.

3. Supposons maintenant que $u_n \varphi(n)$ ait pour limite une quantité finie λ ou bien zéro, mais que $\varphi(n)$ soit une fonction telle que $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit une série convergente; la série proposée $\sum u_n$ sera aussi convergente.

En effet, si $u_n \varphi(n)$ a pour limite une quantité λ ou zéro, on pourra toujours trouver une valeur μ supérieure à λ , mais finie, et telle que, pour une valeur de n suffisamment grande, et pour toute valeur plus grande de n , le produit $u_n \varphi(n)$ soit inférieur à μ ; on aura donc

$$\begin{aligned} u_n \varphi(n) &< \mu, \\ u_{n+1} \varphi(n+1) &< \mu, \\ &\dots\dots\dots, \\ u_{n+p} \varphi(n+p) &< \mu; \end{aligned}$$

on en tire

$$\begin{aligned} &u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p} \\ &< \mu \left[\frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \dots + \frac{1}{\varphi(n+p)} \right]. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est une série convergente, $\sum u_n$ sera donc aussi une série convergente.

On démontre que la série $\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ est convergente pour toute valeur positive de α , quelque petite que soit d'ailleurs la quantité α ; par suite, les séries $\sum \frac{f(n)}{F(n)}$, dans lesquelles le degré du dénominateur surpasse de plus d'une unité celui du numérateur, sont convergentes.

On peut trouver une infinité de fonctions $\varphi(n)$ dont l'ordre de grandeur est compris entre celui de n et celui de $n^{1+\alpha}$, α étant une quantité positive non nulle, et qui jouissent de la propriété de fournir des séries $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ divergentes ou convergentes.

En prenant pour $\varphi(n)$ les fonctions

$$n \text{Ln}, \quad n \text{Ln} \text{Ln} n, \quad \dots,$$

les séries $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ sont divergentes; les fonctions

$$n(Ln)^\mu, \quad nLn(LLn)^\mu, \quad \dots,$$

où $\mu > 1$, donnent, au contraire, des séries $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ qui sont convergentes.

L'ordre de grandeur de ces fonctions va en se rapprochant de plus en plus; mais Abel a démontré qu'il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ intermédiaire entre elles, et telle que, si $u_n \varphi(n)$ a pour limite zéro, la série $\sum u_n$ soit convergente, et si $u_n \varphi(n)$ n'a pas pour limite zéro, la série $\sum u_n$ soit divergente.

S'il était possible de trouver facilement la limite des produits

$$u_n \cdot nLn, \quad u_n \cdot nLnLLn, \quad \dots, \quad u_n n(Ln)^\mu, \quad \dots,$$

on pourrait mettre en évidence la divergence ou la convergence d'un grand nombre de séries à termes positifs; malheureusement cette limite n'est pas, en général, aisée à trouver. Prenons quelques exemples.

4. Soit la série $\sum_{n=0}^{n=\infty} L \left[1 + \frac{1}{\varphi(n)} \right]$, où L désigne un logarithme népérien, et $\varphi(n)$ une fonction qui augmente indéfiniment avec n ; nous aurons

$$u_n \varphi(n) = L \left[1 + \frac{1}{\varphi(n)} \right]^{\varphi(n)}$$

et, par suite,

$$\lim u_n \varphi(n) = Le$$

ou

$$\lim u_n \varphi(n) = 1.$$

Si donc la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente, la proposée

l'est aussi; si $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est divergente, la proposée est divergente.

Ce qui précède nous permet de trouver les conditions dans lesquelles un produit infini de la forme

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_n) \dots$$

est convergent ou divergent.

Considérons, à cet effet, la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} L \left[1 + \frac{1}{\varphi(n)} \right],$$

et posons, pour abrégér,

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \alpha_n.$$

On aura

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = L(1 + \alpha_0) + L(1 + \alpha_1) + \dots + L(1 + \alpha_n)$$

ou

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = L(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_n).$$

Mais nous avons vu que le second membre tend vers une limite finie quand n augmente indéfiniment, si la série $\sum \alpha_n$ est convergente; par suite, le produit

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_n) \dots$$

tend lui-même vers une limite finie, si la série $\sum \alpha_n$ est convergente. Le logarithme de

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_n) \dots$$

augmente au contraire au delà de toute limite, si la série $\sum \alpha_n$ est divergente; on en conclut que le produit

$$(1 - \alpha_0)(1 - \alpha_1) \dots (1 - \alpha_n) \dots$$

(248)

augmente aussi indéfiniment ou tend vers zéro, quand la série $\sum x_n$ est divergente; il augmente indéfiniment, si les facteurs sont plus grands que un, et il tend vers zéro si les facteurs sont plus petits que un.

En particulier, le produit

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \cdots$$

a pour limite une quantité différente de zéro, puisque la série

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{4n^2} + \cdots$$

est une série convergente.

§. Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \frac{1}{2n+1}.$$

Soit

$$u_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \frac{1}{2n+1};$$

on peut écrire u_n sous les deux formes suivantes :

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{1}{2n+1},$$

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2n-2}\right) \frac{1}{2n(2n+1)};$$

par suite,

$$u_n^2 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots$$

$$\times \left[1 - \frac{1}{(2n-2)^2}\right] \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{1}{2n(2n+1)^2}.$$

Soit Θ_n le produit

$$\Theta_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left[1 - \frac{1}{(2n-2)^2}\right],$$

et soit Θ sa limite pour n croissant indéfiniment ; on a

$$u_n^2 = \Theta_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{1}{2n(2n+1)^2};$$

par suite,

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n}} \sqrt{\Theta_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)}$$

et

$$n^{1+\frac{1}{2}} u_n = \frac{n}{(2n+1)\sqrt{2}} \sqrt{\Theta_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)};$$

quand n croît indéfiniment,

$$\lim n^{1+\frac{1}{2}} u_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Theta}{2}}.$$

Le second membre étant fini, et la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}$ étant

convergente, la proposée est aussi convergente ; l'expression précédente montre, en outre, que les termes de la série se rapprochent indéfiniment de ceux de la série

$\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}$; la proposée est convergente comme elle.

6. Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \right]^\mu.$$

En posant

$$u_n = \left[\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \right]^\mu,$$

on aura, d'après ce qui précède,

$$u_n = \frac{1}{(\sqrt{2n})^\mu} \sqrt{\Theta_n^\mu \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^\mu}$$

ou bien

$$n^{\frac{\mu}{2}} u_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^\mu} \sqrt{\Theta_n^\mu \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^\mu},$$

et, par suite,

$$\lim n^{\frac{\mu}{2}} u_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^\mu} \sqrt{\Theta^\mu} = \sqrt{\left(\frac{\Theta}{2}\right)^\mu}, \quad \lim n^{\frac{\mu}{2}} u_n = \left(\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

On voit que, si $\frac{\mu}{2} > 1$, la série proposée est convergente; si $\frac{\mu}{2} = 1$ ou si $\frac{\mu}{2} < 1$, la série est divergente.

On peut traiter d'une manière analogue les séries

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{(2\lambda+1)(2\lambda+3)\dots(2\lambda+2n-1)}{(2\lambda+2)(2\lambda+4)\dots(2\lambda+2n)} \right]^\mu$$

et

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)\dots(\lambda+n-1)}{(3\lambda+\mu)(5\lambda+\mu)\dots[(2n-1)\lambda+\mu]} \right\}^\nu;$$

la première renferme deux paramètres λ et μ , la seconde trois paramètres λ, μ, ν . La première est convergente quand $\frac{\mu}{2} > 1$, la seconde est convergente quand ν est plus grand que deux; dans tous les autres cas, elles sont divergentes; ces séries comprennent un certain nombre de séries bien connues.

7. Soit encore la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{1.2.3\dots n}}$; on sait que le produit $1.2.3\dots n$, pour de grandes valeurs de n , peut s'écrire

$$1.2.3\dots n = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n).$$

ε_n ayant pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, on en déduit

$$\sqrt[n]{1.2.3\dots n} = n e^{-1} \sqrt[n]{2\pi n} \sqrt[n]{(1 + \varepsilon_n)}$$

et, en posant $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{1.2.3\dots n}}$,

$$n u_n = \frac{e}{\sqrt[n]{2\pi n} \sqrt[n]{(1 + \varepsilon_n)}};$$

quand n augmente indéfiniment, nu_n a pour limite e : la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{1.2.3\dots n}}$ est donc divergente.

8. Considérons la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^n x^n}{1.2.3\dots n}$; posant

$$u_n = \frac{n^n x^n}{1.2.3\dots n},$$

on a

$$u_n = \frac{n^n x^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n)};$$

par suite,

$$u_n = \frac{(ex)^n}{\sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n)};$$

si $ex > 1$, la série est divergente ; si $ex < 1$, elle est convergente ; si $ex = 1$, $\lim n^{\frac{1}{2}} u_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ étant divergente, la proposée l'est aussi.

9. Considérons enfin la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} (\sqrt[n]{e} - 1)$; posant

$u_n = \sqrt[n]{e} - 1$, le produit $nu_n = n(\sqrt[n]{e} - 1)$ a pour limite l'unité, quand n augmente indéfiniment ; par suite, la série, dans ses termes éloignés, devient comparable à la série harmonique : elle est donc divergente.