

T.-J. STIELTJES

Note sur la multiplication de deux séries

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 210-215

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__210_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__210_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA MULTIPLICATION DE DEUX SÉRIES;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

Supposons qu'on ait deux séries convergentes

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

$$t = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

Lorsque ces deux séries sont absolument convergentes, on sait que la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ formée par les produits deux à deux de leurs termes, écrits dans un ordre quelconque, sera absolument convergente et égale à st (JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 110).

Dans la suite, nous supposons que la série

$$t = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

est absolument convergente; mais quant à la série

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

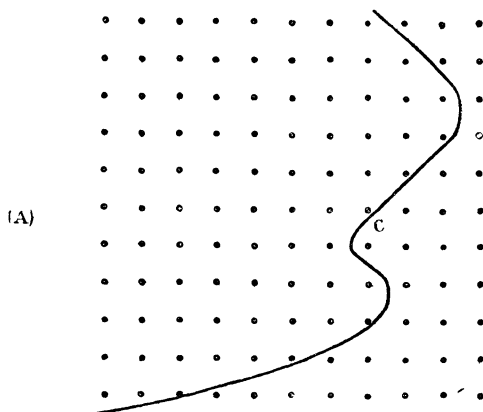
nous ne supposons rien de plus que sa convergence.

Dans ces conditions, la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ n'est plus nécessairement absolument convergente, et par conséquent il faudra préciser l'ordre dans lequel on effectue la sommation.

Écrivons pour cela les termes $u_\alpha v_\beta$ dans le Tableau suivant

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 v_1, & u_2 v_1, & u_3 v_1, & u_4 v_1, & \dots, \\ u_1 v_2, & u_2 v_2, & u_3 v_2, & u_4 v_2, & \dots, \\ u_1 v_3, & u_2 v_3, & u_3 v_3, & u_4 v_3, & \dots, \\ u_1 v_4, & u_2 v_4, & u_3 v_4, & u_4 v_4, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \end{array}$$

ou, plus simplement, en indiquant les termes $u_\alpha v_\beta$ par des points



Traçons maintenant dans ce Tableau (A) une courbe C qui est coupée en un point seulement par une droite horizontale, et prenons la somme de tous les termes $u_\alpha v_\beta$ qui se trouvent du même côté de cette courbe que $u_1 v_1$.

Si maintenant la courbe C se déforme d'une manière quelconque en s'éloignant indéfiniment, mais à la condition d'avoir toujours une seule intersection avec une droite horizontale, nous aurons fixé par là l'ordre dans lequel on doit prendre les termes de la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$. Nous allons faire voir qu'on a alors

$$\Sigma u_\alpha v_\beta = st.$$

Soit L la limite supérieure des modules des sommes

$$\begin{aligned} & u_1, \\ & u_1 + u_2, \\ & u_1 + u_2 + u_3, \\ & u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ & \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et ε_n la limite supérieure des modules des sommes

$$\begin{aligned} & u_{n+1}, \\ & u_{n+1} + u_{n+2}, \\ & u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3}, \\ & u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4}, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Alors L est finie et ε_n converge vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$, parce que la série $s = u_1 + u_2 + \dots$ est convergente.

Soit enfin γ_n la limite supérieure des sommes

$$\begin{aligned} & \text{mod } v_{n+1}, \\ & \text{mod } v_{n+1} + \text{mod } v_{n+2}, \\ & \text{mod } v_{n+1} + \text{mod } v_{n+2} + \text{mod } v_{n+3}, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Comme nous admettons que la série

$$T = \text{mod } v_1 + \text{mod } v_2 + \text{mod } v_3 + \dots$$

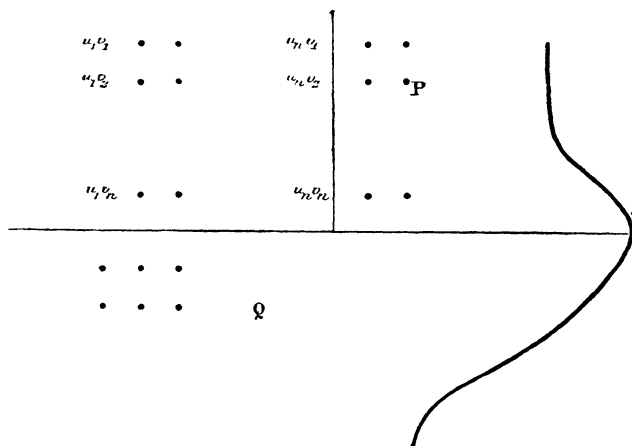
est convergente, γ_n converge encore vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$.

Posons maintenant

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n, \\ t_n &= v_1 + v_2 + \dots + v_n, \end{aligned}$$

et prenons dans la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ un nombre de termes assez grand pour y retrouver tous ceux du produit $s_n t_n$.

La courbe C enveloppera alors le carré



et, si nous prolongeons le côté horizontal inférieur jusqu'à l'intersection avec C, nous aurons

$$(\sum u_{\alpha} v_{\beta})_C = s_n t_n + P + Q.$$

$$\begin{aligned} P = & v_1 (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) \\ & + v_2 (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) \\ & + \dots \\ & + v_n (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = & v_{n+1} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) \\ & + v_{n+2} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) \\ & + v_{n+3} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) \\ & + \dots \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a évidemment

$$\begin{aligned} \text{mod } P &< \varepsilon_n (\text{mod } v_1 + \text{mod } v_2 + \dots + v_n) < T \varepsilon_n, \\ \text{mod } Q &< L \eta_n, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut, pour $n = \infty$,

$$\lim P = 0, \quad \lim Q = 0,$$

et, par conséquent,

$$\sum u_{\alpha} v_{\beta} = \lim s_n t_n = st. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

*Applications.***I. Prenons les deux séries**

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

$$(2) \quad g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$$

En ordonnant le produit suivant les puissances de z

$$(3) \quad f(z) g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

les courbes **C** sont des droites inclinées de 45° .

Si les séries (1), (2) sont convergentes pour $z = R$ et que la convergence soit absolue pour l'une de ces deux séries, alors, d'après le théorème démontré, la série (3) sera également convergente pour $z = R$ et égale à

$$f(R) g(R).$$

II. Prenons les séries

$$F(s) = f(1) + \frac{f(2)}{2^s} + \frac{f(3)}{3^s} + \frac{f(4)}{4^s} + \dots$$

$$G(s) = g(1) + \frac{g(2)}{2^s} + \frac{g(3)}{3^s} + \frac{g(4)}{4^s} + \dots$$

En multipliant, on peut mettre le produit sous la forme

$$F(s) G(s) = h(1) + \frac{h(2)}{2^s} + \frac{h(3)}{3^s} + \frac{h(4)}{4^s} + \dots,$$

en posant

$$h(n) = \Sigma f(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$$

d parcourant tous les diviseurs de n . Les courbes **C** sont évidemment des hyperboles équilatères.

D'après notre proposition, lorsque la convergence de l'une des séries $F(s)$, $G(s)$ est absolue, alors la série

$$h(1) + \frac{h(2)}{2^s} + \frac{h(3)}{3^s} + \dots$$

sera convergente et égale à $F(s) G(s)$.

Nous énoncerons encore la proposition suivante :

Supposons que les séries $F(s)$, $G(s)$ soient convergentes pour $s = \alpha$, elles seront encore convergentes pour $s > \alpha$. Si maintenant la convergence n'est pas absolue, on pourra cependant déterminer deux nombres positifs β, γ , tels que la série $F(s)$ soit absolument convergente pour $s = \alpha + \beta$, et la série $G(s)$ absolument convergente pour $s = \alpha + \gamma$.

Alors la série

$$h(1) + \frac{h(2)}{2^s} + \frac{h(3)}{3^s} + \dots$$

est convergente et égale à $F(s) G(s)$ pour les valeurs de $s \geq \alpha + \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}$. Cette série est aussi convergente et égale à $F(s) G(s)$ pour $s \geq \alpha + \frac{1}{2}$.

Lorsque β ou γ est égal à zéro, on retombe sur la proposition démontrée plus haut.