

CH. BIEHLER

Sur une application du théorème de Rolle

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 190-204

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__190_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE APPLICATION DU THÉORÈME DE ROLLE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Si l'on prend les dérivées par rapport à x et à y de l'expression $(x^2 + y^2 - r^2)^n$, α fois par rapport à x et β fois par rapport à y , les nombres α et β étant des entiers quelconques, mais tels que $2n - (\alpha + \beta) > 0$, on obtient une fonction de degré $2n - (\alpha + \beta)$ en x et y . Si l'on égale à zéro cette fonction, l'équation obtenue représente une courbe qui, abstraction faite des axes de coordonnées, se trouve tout entière renfermée dans le cercle $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Nous allons démontrer cette propriété, bien connue d'ailleurs, en nous appuyant sur les théorèmes suivants :

2. THÉORÈME I. — *Si $\Phi(x)$ est un polynôme en x^2 dont tous les zéros sont imaginaires, mais de la forme $\pm ai$, a étant une quantité réelle, les équations que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées successives de $\Phi(x)$ n'ont d'autres racines réelles que $x = 0$ et leurs racines imaginaires sont toutes de la même forme que celles de $\Phi(x) = 0$.*

En effet, soit

$$\Phi(x) = \varphi(x^2),$$

on aura

$$\Phi'(x) = 2x \varphi'(x^2).$$

Si l'on pose $x^2 = z$, l'équation $\varphi(z) = 0$ a toutes ses

racines réelles et négatives ; par suite , l'équation $\varphi'(z) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles et négatives : le théorème est donc démontré pour l'équation

$$\Phi'(x) = 0.$$

Formons $\Phi''(x)$, on a

$$\Phi''(x) = 4x^2 \varphi''(x^2) + 2\varphi'(x^2);$$

l'équation $\Phi''(x) = 0$ ne contient que des puissances paires de x ; en posant $x^2 = z$, nous allons montrer que l'équation

$$4z \varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0$$

a toutes ses racines réelles et négatives. En effet, l'équation $\varphi(z) = 0$ ayant toutes ses racines réelles et négatives, il en est de même de l'équation $\varphi'(z) = 0$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les n racines de cette équation ; substituons-les dans la fonction

$$4z \varphi''(z) + 2\varphi'(z),$$

elle devient successivement

$$4\alpha_1 \varphi''(\alpha_1), \quad 4\alpha_2 \varphi''(\alpha_2), \quad \dots, \quad 4\alpha_n \varphi''(\alpha_n).$$

Les quantités $\varphi''(\alpha_1), \varphi''(\alpha_2), \dots, \varphi''(\alpha_n)$, d'après le théorème de Rolle, sont de signes contraires, par conséquent la suite des quantités

$$4\alpha_1 \varphi''(\alpha_1), \quad 4\alpha_2 \varphi''(\alpha_2), \quad \dots, \quad 4\alpha_n \varphi''(\alpha_n)$$

ne présente que des variations. L'équation

$$4z \varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0$$

a donc $n - 1$ racines réelles comprises entre α_1 et α_2 , α_2 et α_3 , $\dots$, α_{n-1} et α_n ; comme elle est de degré n , elle a toutes ses racines réelles.

La $n^{\text{ième}}$ racine ne peut pas être positive, car $\varphi''(z)$

et $\varphi'(z)$ sont des polynômes qui ne présentent pas de variations, puisque tous leurs zéros sont réels et négatifs ; par suite

$$4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z)$$

n'en présente pas non plus ; toutes les racines de l'équation

$$4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0$$

sont donc réelles et négatives. On en conclut que les racines de l'équation $\Phi''(x) = 0$ sont toutes imaginaires et de même forme que celles de $\Phi(x) = 0$.

Il est bien évident que ces deux propositions démontrent le théorème.

3. THÉORÈME II. — *Si $\Phi(x)$ est un polynôme en x^2 , tel que l'équation $\Phi(x) = 0$ n'admette pour racines imaginaires que des quantités de la forme $\pm ai$, a étant réel, les dérivées successives de $\Phi(x)$ égalées à zéro nous fourniront des équations dont toutes les racines réelles sont comprises entre la plus grande et la plus petite des racines réelles de $\Phi(x) = 0$.*

Si

$$\Phi(x) = (x^2 - a_1^2)(x^2 - a_2^2) \dots (x^2 - a_n^2)(x^2 + a_1^2) \dots (x^2 + a_p^2),$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ étant des quantités que nous supposons positives et rangées dans l'ordre croissant, $a_1, a_2, \dots, a_p$ des quantités réelles, les racines réelles des équations $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ sont toutes comprises entre $-a_n$ et $+a_n$.

Posons encore

$$\Phi(x) = \varphi(x^2).$$

on aura

$$\Phi'(x) = 2x\varphi'(x^2);$$

en posant, comme précédemment, $x^2 = z$, l'équation $\varphi'(z) = 0$ a toutes ses racines réelles.

(193)

$\Phi'(x) = 0$ a pour racines réelles zéro et $2(n-1)$ autres racines comprises entre les nombres des suites

$$\begin{aligned} & -a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1 \\ \text{et} \\ & +a_1, +a_2, \dots, +a_{n-1}, +a_n. \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned} & -b_{n-1}, -b_{n-2}, \dots, -b_1, 0, \\ & +b_1, +b_2, \dots, +b_{n-1} \end{aligned}$$

les $2n-1$ racines réelles de l'équation dérivée

$$\Phi'(x) = 0,$$

que le théorème de Rolle nous permet de mettre immédiatement en évidence ; une autre racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$ est comprise entre a_1^2 et $-\alpha_1^2$; elle peut être positive ou négative. Si elle est positive, à cette racine correspondront deux racines réelles de l'équation $\Phi'(x) = 0$, en valeur absolue moindres que a_1 et, si elle est négative, il lui correspondra, dans $\Phi'(x) = 0$, deux racines imaginaires de la forme $\pm ai$; quant aux racines de $\varphi'(z) = 0$, comprises entre $-\alpha_1^2$ et $-\alpha_p^2$, il ne leur correspond dans $\Phi'(x) = 0$ que des racines imaginaires de la forme $\pm ai$; l'équation $\Phi'(x) = 0$ n'a donc pour racines réelles que des quantités comprises entre $-a_n$ et $+a_n$, ce qui démontre le théorème pour $\Phi'(x)$

On a, comme précédemment,

$$\Phi''(x) = 4x^2 \varphi''(x^2) + 2\varphi'(x^2) = \Theta(x^2).$$

L'équation $\Phi''(x) = 0$ ne renferme que des puissances paires de x ; en posant $x^2 = z$, elle devient

$$\Theta(z) = 4z \varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0.$$

Cette équation a toutes ses racines réelles.

En effet, nous avons vu que $\Phi'(x) = 0$ a $2n-1$ ra-

cines réelles

$$-b_{n-1}, -b_{n-2}, \dots, -b_1, 0, +b_1, \dots, +b_{n-1},$$

et qu'elle pouvait avoir de plus deux autres racines réelles entre 0 et b_1 et entre 0 et $-b_1$. Elle a toujours au moins $2(p-1)$ racines imaginaires de la forme $\pm ai$. Si $\Phi'(x) = 0$ a $2n-1+2$ racines réelles, $\Phi''(x) = 0$ a $2n$ racines réelles dans les intervalles présentés par les premières; mais alors $\Theta(z) = 0$ a n racines positives et $p-2$ racines négatives; car nous avons vu que $\varphi'(z) = 0$ a $p-1$ racines négatives, et ces racines substituées dans $\Theta(z)$ donnent des résultats de substitution de signes contraires. L'équation

$$\Theta(z) = 0$$

a donc, dans ce cas, $n+p-2$ racines réelles et, comme elle n'est que de degré $n+p-1$, toutes ses racines sont réelles.

Si, au contraire, $\Phi(x) = 0$ n'a que $2n-1$ racines réelles, $\Phi'(x) = 0$ n'aura que $2n-2$ racines réelles dans l'intervalle de $-b_{n-1}$ à $+b_{n-1}$, mais alors

$$\varphi'(z) = 0$$

a p racines négatives qui sépareront $p-1$ racines réelles de $\Theta(z) = 0$; on en conclut que $\Theta(z) = 0$ a $n+p-2$ racines réelles et, par suite, que, dans les deux cas, toutes ses racines sont réelles.

L'équation $\Theta(x^2) = 0$ est de la forme de $\Phi(x) = 0$; elle n'a, d'après ce que nous venons de démontrer, que des racines réelles et des racines imaginaires de la forme $\pm ai$; on démontrerait sur cette équation que ses deux premières équations dérivées remplissent également les conditions de l'énoncé, et ainsi de suite.

Il faut toutefois que la $(n+p-1)^{\text{ième}}$ racine de

$\Theta(z) = 0$, sur l'ordre de grandeur de laquelle nous ne savons rien jusqu'ici, soit moindre que a_n , si elle est positive. Nous allons démontrer qu'elle est moindre que la plus grande racine positive α de l'équation $\varphi'(z) = 0$; elle sera alors moindre que a_n . Il suffit de faire voir que $\Theta(+\infty)$ et $\Theta(\alpha)$ sont de mêmes signes. Or, $\Theta(+\infty)$ est du signe de $\varphi''(+\infty)$, $\Theta(\alpha)$ est du signe de $\varphi''(\alpha)$; entre α et $+\infty$, $\varphi''(z) = 0$ n'a pas de racine : donc, $\Theta(+\infty)$ et $\Theta(\alpha)$ sont de mêmes signes.

4. Les théorèmes I et II subsistent, quand même un certain nombre de facteurs de la forme $x^2 - a^2$ ou $x^2 + a^2$ deviennent égaux entre eux.

En particulier, si toutes les racines sont imaginaires et deviennent égales deux par deux, c'est-à-dire si

$$\Phi(x) = (x^2 + a^2)^n,$$

toutes les équations $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ ont toutes leurs racines imaginaires, sauf la racine $x = 0$; si

$$\Phi(x) = (x^2 - a^2)^n,$$

toutes les équations $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ ont leurs racines réelles et comprises entre $-a$ et $+a$.

Les démonstrations précédentes s'appliquent sans modifications sensibles.

Cela posé, nous allons passer à la démonstration du théorème énoncé au début.

§. Considérons la fonction $U = (x^2 + y^2 - r^2)^n$.

Nous allons démontrer que l'équation

$$\frac{\partial x + \beta U}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

représente une courbe qui, abstraction faite des axes de

(196)

coordonnées, est renfermé tout entière dans le cercle $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

La dérivée $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ est de la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (x^2 + y^2 - r^2)^{n-2} \Phi(x, y):$$

$\Phi(x, y)$ étant un polynôme en x^2 et y^2 , et qui renferme x en facteur s'il est de degré impair. On voit, à l'inspection de ce polynôme, qu'il est de la forme

$$x^\varepsilon \varphi(r^2, x^2 + y^2 - r^2),$$

la fonction φ étant homogène en x^2 et $x^2 + y^2 - r^2$, et ε étant zéro ou un.

On pourra donc écrire

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = x^\varepsilon (x^2 + y^2 - r^2)^{n-2} \varphi(x^2, x^2 + y^2 - r^2).$$

La fonction homogène $\varphi(x^2, x^2 + y^2 - r^2)$ peut être décomposée en un produit de facteurs de la forme

$$\backslash (x^2 + y^2 - r^2 + \lambda_1 x^2) \\ (x^2 - y^2 - r^2 + \lambda_2 x^2) \dots (x^2 + y^2 - r^2 + \lambda_\alpha x^2):$$

les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\alpha$ sont indépendantes de x , de y et de r : ce sont des quantités numériques réelles et positives.

En effet, dans l'hypothèse de $r^2 - y^2 > 0$, les racines de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

sont, d'après les théorèmes précédents, toutes réelles et comprises entre

$$-\sqrt{r^2 - y^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Comme on doit avoir, en désignant par x_μ une de ces

racines,

$$x_{\mu}^2 + y^2 - r^2 + \lambda x_{\mu}^2 = 0$$

et que

$$x_{\mu}^2 < r^2 - y^2,$$

il s'ensuit que

$$x_{\mu}^2 + y^2 - r^2 < 0,$$

et, par suite, λx_{μ}^2 est positif, ce qui exige que λ soit positif.

Nous avons supposé, pour établir ce résultat, que $r^2 - y^2 > 0$; il est évident que, les quantités λ étant indépendantes de x , de y et de r , la conclusion précédente subsiste dans tous les cas ; on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= N x^{\varepsilon} (x^2 + y^2 - r^2)^{n-\alpha} [x^2(1 + \lambda_1) + y^2 - r^2] \\ &\quad \times [x^2(1 + \lambda_2) + y^2 - r^2] \dots [x^2(1 + \lambda_{\alpha'}) + y^2 - r^2]. \end{aligned}$$

En égalant à zéro $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, on obtient un certain nombre de fois le cercle $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, l'axe de y si $\varepsilon \geq 0$, et enfin une série d'ellipses, dont les équations sont toutes de la forme

$$x^2(1 + \lambda) + y^2 - r^2 = 0,$$

qui ont pour grand axe le diamètre vertical du cercle, pour petit axe une portion du diamètre horizontal. Elles sont donc renfermées dans le cercle

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Si maintenant on prend β fois la dérivée par rapport à y de

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

on obtient un polynôme en x et y de degré

$$2n - (\alpha + \beta).$$

Ce polynôme, considéré comme une fonction de y ,

provenant par β dérivations successives du polynôme en y^2 , $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ a, d'après le théorème II, tous ses zéros réels compris entre la plus grande et la plus petite racine réelle de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0.$$

Il est évident que la quantité $r^2 - x^2$ est supérieure à toutes les quantités de la forme

$$r^2 - x^2 (1 + \lambda),$$

où λ est une quantité positive. Par suite, toutes les racines réelles de l'équation en y

$$\frac{\partial^{2+\beta} U}{\partial x^2 \partial y^\beta} = 0$$

sont comprises entre

$$-\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2 - x^2};$$

on a donc, en désignant par y_μ une racine réelle quelconque de cette équation,

$$y_\mu^2 < r^2 - x^2$$

ou bien

$$x^2 + y_\mu^2 - r^2 < 0;$$

les points de coordonnées x et y_μ sont donc situés à l'intérieur du cercle

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Ce sont d'ailleurs les seules solutions réelles de l'équation ; car, si $r^2 - x^2 < 0$, toutes les racines en y de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

sont imaginaires, à l'exception de la racine $y = 0$, si elle s'y trouve.

6. Considérons maintenant la fonction plus complexe

$$V = (x^4 + y^4 - r^4)^n,$$

la dérivée d'ordre α de V ,

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = x^\varepsilon (x^4 + y^4 - r^4)^{n-\alpha} \varphi_\varepsilon(x^4 + y^4 - r^4, x^4),$$

ε étant l'un des nombres 0, 1, 2, 3 et

$$\varphi_\varepsilon(x^4 + y^4 - r^4, x^4)$$

une fonction homogène des quantités $x^4 + y^4 - r^4$ et x^4 , dont les coefficients sont indépendants de x , de y et de r .

On voit immédiatement que, si l'on prend les dérivées successives de $(x^4 + \alpha^4)^n$, ces dérivées sont de la forme

$$x^\varepsilon (x^4 + \alpha^4)^{n-\mu} \Theta(x^4),$$

ε étant l'un des nombres 0, 1, 2, 3 et Θ une fonction de x^4 qui n'a que des permanences; l'équation obtenue en égalant à zéro l'une quelconque de ces dérivées a donc toutes ses racines imaginaires, excepté la racine $x = 0$.

Pour que les dérivées de $(x^4 + y^4 - r^4)^n$, égalées à zéro, aient des racines réelles, il faut donc que

$$r^4 - y^4 > 0.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} (x^4 + y^4 - r^4)^n &= [x^4 - (r^4 - y^4)]^n \\ &= (x^2 - \sqrt{r^4 - y^4})^n (x^2 + \sqrt{r^4 - y^4})^n. \end{aligned}$$

cette fonction rentrant dans le type de celles du théorème II.

On en conclut que l'équation

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = 0$$

a toutes ses racines réelles comprises entre

$$-\sqrt[n]{r^i - y^i} \quad \text{et} \quad +\sqrt[n]{r^i - y^i} :$$

et l'on en conclut aussi que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = N x^2 (x^i + y^i - r^i)^{n-2} \\ (x^i + y^i - r^i + \lambda_1 x^i) \dots (x^i + y^i - r^i + \lambda_{2i} x^i).$$

Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2i}$ sont réelles et positives ; la démonstration se fait comme dans le cas précédent.

En vertu d'un théorème plus général que nous énoncerons plus loin, si $\Phi(x)$ est un polynôme de la forme

$$\Phi(x) = (x^i - a_1^i)(x^i - a_2^i) \dots \\ (x^i - a_n^i)(x^i + \alpha_1^i) \dots (x^i + \alpha_p^i),$$

les équations dérivées $\Phi^{(u)}(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles comprises entre la plus grande et la plus petite racine de $\Phi(x) = 0$, c'est-à-dire entre $-a_n$ et $+a_n$, si a_n est la plus grande des quantités $a_1, a_2, \dots, a_n$. En prenant les dérivées d'ordre β des deux membres de l'égalité

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = x^2 (x^i + y^i - r^i)^{n-2} \\ (x^i + y^i - r^i + \lambda_1 x^i) \dots (x^i + y^i - r^i + \lambda_{2i} x^i),$$

on obtient la fonction $\frac{\partial^{2+\beta} V}{\partial x^2 \partial y^\beta}$ qui, égalée à zéro, a toutes ses racines comprises entre $-\sqrt[r^i]{r^i - x^i}$ et $+\sqrt[r^i]{r^i - x^i}$, et, pour qu'elle ait des racines réelles, il faut que

$$r^i - x^i > 0.$$

On en conclut, comme précédemment, que toutes les courbes

$$\frac{\partial^{2+\beta} V}{\partial x^2 \partial y^\beta} = 0$$

sont renfermées dans la courbe

$$x^i + y^i - r^i = 0.$$

7. Si l'on considère la fonction

$$W = (x^{2m} + y^{2m} - r^{2m})^n,$$

l'équation

$$\frac{\partial^{2\alpha+2\beta} W}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\beta}} = 0$$

représente des courbes qui, abstraction faite des axes de coordonnées, sont toutes renfermées dans la courbe

$$x^{2m} + y^{2m} - r^{2m} = 0.$$

Cette proposition est une conséquence des théorèmes suivants :

I. Si $\Phi(x)$ représente le polynôme

$$\Phi(x) = (x^{2m} + a_1^{2m})(x^{2m} + a_2^{2m}) \dots (x^{2m} + a_n^{2m}),$$

les racines de $\Phi^{(u)}(x) = 0$ sont toutes imaginaires ;
 $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont supposées des quantités réelles.

II. Si $\Phi(x)$ représente le polynôme

$$\Phi(x) = (x^{2m} - a_1^{2m})(x^{2m} - a_2^{2m}) \dots \\ (x^{2m} - a_n^{2m})(x^{2m} + a_1^{2m}) \dots (x^{2m} + a_p^{2m}),$$

les équations $\Phi^{(u)}(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles comprises entre la plus grande et la plus petite racine réelle de $\Phi(x) = 0$.

La démonstration de ces théorèmes est tout à fait analogue à celle des théorèmes du même genre que nous avons démontrés dans le cas de $m = 1$; nous n'insisterons pas pour éviter des longueurs et nous allons passer à une généralisation qui s'offre d'elle-même.

8. Considérons la fonction

$$U = (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^n.$$

Je vais démontrer que les surfaces représentées par les équations

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = 0$$

sont, abstraction faite des plans coordonnés, toutes renfermées dans la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha} U}{\partial x^{\alpha}} &= x^{\varepsilon} (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{n-\alpha} \Phi(x, y, z) \\ (\varepsilon &= 0 \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 1). \end{aligned}$$

On montrera, comme précédemment, que $\Phi(x, y, z)$ est de la forme

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= N(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 x^2) \\ &\quad (x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_2 x^2) \dots (x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_{\alpha'} x^2), \end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\alpha'}$ étant des quantités positives et N un nombre. $\Phi(x, y, z) = 0$ représente donc une série d'ellipsoïdes renfermés tous dans la sphère.

La fonction $\frac{\partial^{\alpha} U}{\partial x^{\alpha}}$ peut s'écrire aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha} U}{\partial x^{\alpha}} &= x^{\varepsilon} [A_0(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{\mu} \\ &\quad + A_1 x^2 (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{\mu-1} + \dots + A_{\mu} x^{2\mu}]. \end{aligned}$$

Si l'on prend β fois la dérivée des deux membres par rapport à y , il viendra

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} = x^{\varepsilon} y^{\eta} \left[\sum B(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{\nu} x^{2\rho} y^{2q} \right],$$

η étant, comme ε , zéro ou un, et la somme $2\nu + 2\rho + 2q$

étant la même pour tous les termes du polynôme qui figure dans le second membre.

Les racines de l'équation en y , représentée par

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0.$$

sont, d'après les théorèmes démontrés, toutes comprises entre

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2 - x^2 - z^2},$$

si elles sont réelles.

Elles sont toutes imaginaires si $r^2 - x^2 - z^2 < 0$.

Le polynôme

$$\frac{1}{x^\alpha y^\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$$

étant homogène en $x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, x^2 et y^2 , si l'on pose

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = -\lambda' y^2,$$

l'équation

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0$$

devient

$$\sum B \lambda'^\gamma \left(\frac{x}{y} \right)^{2p} = 0.$$

Dans cette équation, la quantité λ' est indépendante de z , et l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = -\lambda' y^2$ montre que les quantités λ' sont positives. On pourra alors poser

$$\sum B (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^\gamma x^{2p} y^{2q} = N' (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{n-\alpha-\beta} \\ \times (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + \lambda'_1 y^2) \dots (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + \lambda'_\beta y^2);$$

les quantités $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots$ sont des fonctions de x et de y seulement, et elles sont positives. En prenant γ fois la dérivée par rapport à z , on obtiendra une expression

qui, égalée à zéro, aura ses racines réelles comprises entre

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2};$$

elles satisfont donc à la condition

$$z^2 < r^2 + x^2 - y^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 < 0.$$

Les points réels représentés par l'équation

$$\frac{\partial x + \beta + \gamma U}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} = 0$$

sont donc tous renfermés dans la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

à l'exception de ceux qui sont donnés par les équations

$$x^2 = 0, \quad y^2 = 0, \quad z^2 = 0.$$

La même proposition s'étend aux surfaces tirées par dérivation de l'expression

$$(x^{2m} + y^{2m} + z^{2m} - r^{2m})^n.$$