

B. NIEWENGLOWSKI

Application d'un théorème de Stewart

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 173-175

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__173_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATION D'UN THÉORÈME DE STEWART ;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

Étant donnés trois points A, B, C en ligne droite, et un quatrième point O, on a, en vertu d'un théorème de Stewart,

$$(1) \quad \overline{OA}^2 \cdot BC + \overline{OB}^2 \cdot CA + \overline{OC}^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0,$$

pourvu que les segments AB, BC, CA soient comptés avec le signe + dans un sens, avec le signe — en sens contraire.

Posons

$$\overline{OA}^2 = \alpha + R^2, \quad \overline{OB}^2 = \beta + R^2, \quad \overline{OC}^2 = \gamma + R^2;$$

en substituant dans l'égalité (1), on obtient immédiatement

$$(2) \quad \alpha BC + \beta CA + \gamma AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0,$$

équation qui fournit une relation entre les puissances de trois points A, B, C situés en ligne droite, par rapport à un cercle quelconque.

Cette équation, conséquence immédiate du théorème de Stewart, permet de faire une discussion très simple de ce problème :

Mener par deux points A, B une circonférence tangente à une circonférence donnée O.

Supposons, en effet, le problème résolu, et soit C le point où la tangente commune à la circonférence cherchée et à la circonférence donnée rencontre la droite AB; on a

$$(3) \quad \gamma = CA \cdot CB.$$

En introduisant cette hypothèse dans l'équation (2), celle-ci devient

$$\alpha BC + \beta CA = 0$$

ou bien

$$(4) \quad \frac{CA}{CB} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Cela étant, si le problème est possible, les points A et B sont évidemment tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs au cercle donné O.

Réciproquement, si A et B sont tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs au cercle O, on peut choisir sur AB un point C vérifiant l'équation (4); ce point C sera extérieur au segment AB, puisque les puissances

α et β seront de même signe. Or on aura cette fois

$$\alpha BC + \beta CA = 0;$$

d'où, à cause de l'équation (2), il résulte que

$$\gamma = CA.CB.$$

La puissance du point C par rapport au cercle O sera donc positive; on pourra, par suite, mener de C deux tangentes CT, CT' au cercle O, T et T' désignant les points de contact. Les égalités

$$CT^2 = CA.CB, \quad CT'^2 = CA.CB$$

montrent que les cercles passant par A, B, T et A', B', T' sont tangents au cercle donné.