

E. JAGGI

Sur les équations différentielles linéaires sans second membre

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 83-85

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__83_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE ;

PAR M. E. JAGGI,
Étudiant à la Faculté de Besançon.

Soit

$$(1) \quad y^{(m)} + P_1 y^{(m-1)} + P_2 y^{(m-2)} + \dots + P_m y = 0$$

l'équation différentielle linéaire sans second membre la plus générale. Je me propose de donner une méthode pour former l'équation aux produits $u = y_1 y_2$ des intégrales de cette équation.

Soit M l'ordre de cette équation.

Désignons, pour abrégér, par S_h^k la somme

$$y_1^{(h)} y_2^{(k)} + y_1^{(k)} y_2^{(h)},$$

en sorte que

$$S_h^k = S_k^h,$$

et convenons en outre que, lorsque $k = h$, on écrira simplement

$$S_h^h = y_1^h y_2^h.$$

Cela posé, dérivons M fois l'équation $u = y_1 y_2$. Nous

pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 u &= S_0^0, \\
 u' &= S_1^0, \\
 u'' &= S_2^0 + 2 S_1^1, \\
 u''' &= S_3^0 + 3 S_2^1, \\
 u^{IV} &= S_4^0 + 4 S_3^1 + 6 S_2^2, \\
 u^V &= S_5^0 + 5 S_4^1 + 10 S_3^2, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 u^M &= S_M^0 + M S_{M-1}^1 - \frac{M(M-1)}{1.2} S_{M-2}^2 + \dots\dots
 \end{aligned}$$

Tout revient à trouver assez d'équations entre les S pour les éliminer.

Or remarquons que γ^m est donné en fonction de $\gamma^{m-1}, \gamma^{m-2}, \dots, \gamma$; γ^{m+1} est donné en fonction de $\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^m$, c'est-à-dire en fonction de $\gamma, \gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{m-1}$, par une simple différentiation de l'équation (1); et ainsi de suite. On voit ainsi que toutes les quantités S_h^k dans lesquelles l'un des indices au moins est supérieur à $(m-1)$ s'exprimeront en fonction des quantités S_i^j où les deux indices sont inférieurs à m . Les seules inconnues sont donc ces dernières quantités. Leur nombre est $\frac{m(m+1)}{2}$ (i et j varient tous deux de 0 à $m-1$). Il faudra donc que le système (2) contienne $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ équations pour éliminer les S_i^j .

Par suite, il faudra prendre $M = \frac{m(m+1)}{2}$.

Les équations (2) étant alors écrites et ne contenant que les S_i^j , où i et j sont inférieurs ou égaux à $m-1$, l'élimination de ces quantités se fera immédiatement, car il est facile de voir que les équations sont linéaires. Le résultat se présentera donc sous la forme d'un déterminant de $(M+1)^2$ éléments dans lequel les $u, u', \dots, u^M$

n'entreront que comme éléments de la première colonne; par conséquent on peut énoncer ce théorème :

Les produits deux à deux des intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre m sans second membre sont solutions d'une équation linéaire sans second membre d'ordre $\frac{m(m+1)}{2}$.

Ce qui précède donne le moyen de former cette équation.

Remarque. — Sachant que les produits $u = y_1 y_2$ peuvent être donnés par une équation différentielle, on vérifie facilement que cette équation admet comme solutions les carrés des y , ce qui devait être *a priori*; je dis que, réciproquement, si l'on peut amener l'équation en y^2 à être linéaire, on aura l'équation en $y_1 y_2$.

En effet, soit

$$u = y_1 y_2.$$

Je dis que u est racine de l'équation linéaire en y^2 . Posons

$$y = y_1 + y_2.$$

on a

$$y^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2u;$$

y^2, y_1^2, y_2^2 sont solutions de l'équation linéaire, donc $2u$ et par suite u en est aussi une solution.

Or il est facile de voir que l'équation en y^2 se présente immédiatement avec l'ordre m sous forme rationnelle et entière, mais non linéaire. Il faudra donc différentier $\frac{m(m+1)}{2} - m = \frac{m(m-1)}{2}$ fois pour arriver à l'équation linéaire en u . Ceci donne un second moyen de former l'équation cherchée.