

E. CAHEN

Note sur la théorie des séries

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 535-538

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__535_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA THÉORIE DES SÉRIES ;

PAR M. E. CAHEN,

Professeur de Mathématiques spéciales à l'École de Cluny.

Dans une série à termes positifs $u_0, u_1, \dots, u_n$, supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, lorsque n croît indéfiniment, tende vers 1 par valeurs inférieures à 1.

Duhamel a donné un procédé pour décider de la convergence ou de la divergence d'une telle série : on pose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n}, \text{ et l'on cherche la limite de } n\alpha_n.$$

Si cette limite est > 1 , la série est convergente ;

Si cette limite est < 1 , la série est divergente ;

Si cette limite est $= 1$, la règle de Duhamel ne s'applique pas.

Voici, dans ce cas, une règle qui complète celle de Duhamel.

On pose $n\alpha_n = 1 + \beta_n$; β_n a pour limite 0, et l'on cherche la limite de $n\beta_n$. Si cette limite est différente de $+\infty$, la série est divergente.

Soient, en effet, l cette limite et k un nombre $> l$. On aura, pour des valeurs suffisamment grandes de n ,

$$n\beta_n < k, \quad \text{d'où} \quad \beta_n < \frac{k}{n}.$$

Par suite

$$1 + \beta_n \quad \text{ou} \quad n\alpha_n < 1 + \frac{k}{n}$$

et

$$\alpha_n < \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}.$$

De là on tire

$$\frac{1}{1 + \alpha_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}},$$

a fortiori

$$\frac{1}{1 + \alpha_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} + \dots}$$

ou

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n\left(1 - \frac{k}{n}\right)}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n - k}{n - k + 1}.$$

Si l'on considère la série dont le terme général $v_n = \frac{1}{n-k}$, cette série est, comme on sait, divergente.

Donc, puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$, la série $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ est aussi divergente.

Premier exemple. — Supposons que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se mette sous la forme d'une fraction rationnelle en n , telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \dots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \dots},$$

expression qui tend vers 1 lorsque n croît indéfiniment. On a, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \dots - 1}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \dots} \\ &= \frac{(A-a)n^{\lambda-1} + (B-b)n^{\lambda-2} + \dots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \dots}, \\ n\alpha_n &= \frac{(A-a)n^\lambda + (B-b)n^{\lambda-1} + \dots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \dots}; \end{aligned}$$

$n\alpha_n$ tend vers $A - a$.

La règle de Duhamel montre que :

Si $A - a > 1$, la série est convergente ;

Si $A - a < 1$, la série est divergente ;

Si $A - a = 1$, on a

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{(B-b)n^{\lambda-1} + \dots}{n^\lambda + \dots}, \\ n\beta_n &= \frac{(B-b)n^\lambda + \dots}{n^\lambda + \dots}. \end{aligned}$$

La limite de $n\beta_n$ est $B - b$. Donc la série est divergente. Cette règle est de Gauss.

Second exemple. — Soit la série dont le terme gé-

néral est

$$u_{n+1} = (2 - \sqrt[n]{e})(2 - \sqrt[n]{e}) \dots (2 - \sqrt[n]{e}),$$

ce terme général tend vers 0. En effet, on a

$$\sqrt[n]{e} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Donc

$$2 - \sqrt[n]{e} < 1 - \frac{1}{n};$$

le terme général est donc

$$< \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{n},$$

il tend vers 0.

Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - \sqrt[n]{e}$, il tend vers 1;

$$\alpha_n = \frac{1}{2 - \sqrt[n]{e}} - 1 = \frac{\sqrt[n]{e} - 1}{2 - \sqrt[n]{e}},$$

$$n\alpha_n = \frac{n(\sqrt[n]{e} - 1)}{2 - \sqrt[n]{e}} = \frac{1 + \frac{1}{1.2} \frac{1}{n} + \dots}{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{1.2} \frac{1}{n^2} - \dots},$$

$n\alpha_n$ tend vers 1;

$$\beta_n = \frac{1 + \frac{1}{1.2} \frac{1}{n} + \dots}{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{1.2} \frac{1}{n^2} - \dots} - 1 = \frac{\frac{3}{2} \frac{1}{n} + \dots}{1 - \frac{1}{n} - \dots},$$

$$n\beta_n = \frac{\frac{3}{2} + \dots}{1 - \dots},$$

$n\beta_n$ tend vers $\frac{3}{2}$. Donc la série est divergente.
