

J.-B. POMEY

Sur une fonction qui a une ligne d'infinis

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 530-533

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__530_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE FONCTION QUI A UNE LIGNE D'INFINIS;

PAR M. J.-B. POMEY.

On considère souvent en Analyse et l'on rencontre dans la théorie du potentiel des fonctions qui sont discontinues le long de lignes.

Je me propose de former ici, *a priori*, une fonction qui a une ligne d'infinis.

A cet effet, soit ω une variable imaginaire. J'envisage

la série double dont le terme général est

$$\frac{1}{(x - \omega y)^{2+\alpha}},$$

x et y devant prendre toutes les valeurs entières positives et négatives, et α étant un nombre réel positif.

Je vais montrer d'abord que, si ω est imaginaire, la série est convergente.

Les points qui sont les affixes des quantités imaginaires $x + \omega y$ sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes dont les côtés sont 1 et ω .

Si r représente la distance de l'origine à l'un quelconque de ces sommets (l'origine étant naturellement exclue du nombre de ces sommets), la série des modules pourra être désignée par

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}}.$$

Je dis qu'elle est convergente.

Soient :

A un des parallélogrammes ;

S sa surface ;

$d\sigma$ un élément de son aire ;

u la distance de l'origine à $d\sigma$;

r la distance de l'origine au sommet de A, qui en est le plus éloigné.

On aura, en étendant l'intégration à tous les éléments $d\sigma$ de A,

$$\int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}} > \frac{1}{r^{2+\alpha}} \int d\sigma$$

ou

$$\frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}}.$$

Cela posé, nous pouvons négliger, dans la série

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}},$$

les termes qui se rapportent aux parallélogrammes A en nombre fini qui ne sont pas complètement extérieurs à un cercle de rayon R, dont le centre est à l'origine. Alors la divergence ou la convergence de la série ne pouvant être altérée par cette suppression, et le signe de sommation ne se rapportant qu'à des sommets extérieurs à ce cercle, j'aurai

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \int_{\Sigma_A} \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}};$$

l'intégrale est prise ici à l'intérieur de tous les parallélogrammes qui sont tout à fait extérieurs au cercle R, et l'on aura, *a fortiori*,

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}},$$

si l'on étend en plus l'intégrale aux portions extérieures au cercle R des parallélogrammes que ce cercle coupe, de manière que dès lors l'intégrale est étendue à toute la portion du plan extérieure au cercle R.

L'intégrale peut se calculer aisément en prenant pour élément d'aire l'aire comprise entre deux cercles décrits de l'origine comme centre avec u et $u + du$ pour rayon

On a ainsi

$$\int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}} = 2\pi \int \frac{du}{u^{1+\alpha}} = -\frac{2\pi}{\alpha} \left(\frac{1}{u^\alpha} \right)_R^\infty = \frac{2\pi}{\alpha R^\alpha}.$$

Donc on a

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \frac{2\pi}{\alpha R^\alpha}.$$

Si donc ω est imaginaire, la série en question est convergente.

Mais, si ω est réel, S est nul, et le raisonnement précédent tombe en défaut. De plus, $x + \omega y$ s'annule, si ω est commensurable, pour une infinité de valeurs de x et de y , la série diverge alors comme ayant une infinité de termes infinis, parce que leurs dénominateurs sont nuls. Et, si ω est incommensurable, un raisonnement direct connu, ou un résultat tiré de la théorie des fractions continues, nous apprend que $x + \omega y$ peut être rendu moindre que $\frac{1}{y}$ pour des valeurs convenables infiniment grandes de x et de y ; la série diverge donc encore, comme ayant un nombre infini de termes infiniment grands. Notre série double a donc bien une ligne d'infinis qui est l'axe des quantités réelles.