

ERNEST CESÀRO

Le déterminant de Smith et Mansion

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 44-47

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__44_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE DÉTERMINANT DE SMITH ET MANSION;

PAR M. ERNEST CESARO.

1. Soit $F(i, j)$ une fonction quelconque du plus grand commun diviseur de i et j . M. Smith a trouvé la valeur du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} F(1,1) & F(1,2) & F(1,3) & \dots & F(1,n) \\ F(2,1) & F(2,2) & F(2,3) & \dots & F(2,n) \\ F(3,1) & F(3,2) & F(3,3) & \dots & F(3,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(n,1) & F(n,2) & F(n,3) & \dots & F(n,n) \end{vmatrix},$$

dans le cas particulier de $F(x) = x$. M. Mansion a donné, ensuite, l'expression générale de D . Ayant imaginé une fonction f , telle que l'on ait, pour toute valeur de x ,

$$F(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \dots,$$

où $a, b, c, \dots$ sont les diviseurs de x , M. Mansion a trouvé

$$(1) \quad D = f(1)f(2)f(3)\dots f(n).$$

Soit $\mu(x)$ une fonction généralement nulle, mais égale à $(-1)^\tau$ lorsque x est le produit de τ facteurs premiers, inégaux. Si la fonction F est donnée et si l'on veut connaître f , on a la formule

$$(2) \quad f(x) = \mu\left(\frac{x}{1}\right) F(1) + \mu\left(\frac{x}{2}\right) F(2) + \mu\left(\frac{x}{3}\right) F(3) + \dots$$

2. Les études des géomètres sur le déterminant D se bornent à la formule (1). Dans l'article *Determinanti in Arithmetica*, inséré au *Journal de Battaglini* (1885),

nous avons fait connaître d'autres résultats, et, en particulier, nous avons démontré que le complément algébrique de l'élément $F(i, j)$ est donné par la formule

$$(3) \quad A_{i,j} = D \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\mu\left(\frac{\nu}{i}\right) \mu\left(\frac{\nu}{j}\right)}{f(\nu)},$$

et nous en avons déduit que $A_{i,j}$ est nul lorsque le quotient du plus petit commun multiple par le plus grand commun diviseur de i et j admet des facteurs carrés.

3. En nous aidant des relations qui précèdent, nous allons chercher la valeur du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} G & G(1) & G(2) & \dots & G(n) \\ G(1) & F(1, 1) & F(1, 2) & \dots & F(1, n) \\ G(2) & F(2, 1) & F(2, 2) & \dots & F(2, n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(n) & F(n, 1) & F(n, 2) & \dots & F(n, n) \end{vmatrix},$$

que nous écrirons, sous forme abrégée, comme il suit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} G & G(i) \\ G(j) & F(i, j) \end{vmatrix}_{i,j}^1_n.$$

Il est évident que

$$\Delta = CD - \sum_{i,j} G(i)G(j)A_{i,j},$$

i et j variant séparément de 1 à n . On a donc, en vertu de (3) et en supposant, pour simplifier, $C = 0$,

$$\Delta = -D \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left\{ \frac{1}{f(\nu)} \sum_{i,j} G(i)G(j) \mu\left(\frac{\nu}{i}\right) \mu\left(\frac{\nu}{j}\right) \right\}.$$

Or il est clair que

$$\sum_{i,j} G(i)G(j) \mu\left(\frac{\nu}{i}\right) \mu\left(\frac{\nu}{j}\right) = \left\{ G(1) \mu\left(\frac{\nu}{1}\right) + G(2) \mu\left(\frac{\nu}{2}\right) + \dots \right\}^2,$$

et, par suite, si l'on imagine une fonction g , qui se déduit de G , comme la fonction f a été déduite de F , on peut écrire, en ayant égard à (2),

$$\Delta = -f(1)f(2)f(3) \dots f(n) \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{g^2(\nu)}{f(\nu)}.$$

Par exemple,

$$\left\| \begin{array}{cc} 0 & F(i) \\ F(j) & F(i, j) \end{array} \right\|_n = -f(1)f(2) \dots f(n) \{f(1) - f(2) - \dots + f(n)\}.$$

Autre exemple : Si $F(x)$ est le nombre des diviseurs de x , et $G(x)$ le nombre des diviseurs premiers de x , le déterminant

$$\left\| \begin{array}{cc} 0 & G(i) \\ G(j) & F(i, j) \end{array} \right\|_n$$

représente, en valeur absolue, la *totalité des nombres premiers, non supérieurs à n* .

4. Cherchons, de même, la valeur du déterminant

$$\nabla = \left\| \begin{array}{cc} 0 & G(i) \\ G(j) & \Lambda_{i,j} \end{array} \right\|_n.$$

La considération du déterminant réciproque de D conduit immédiatement à la formule

$$\nabla = -D^{n-2} \sum_{i,j} G(i)G(j)F(i, j).$$

Ordonnons le second membre par rapport à la fonction f . Il est clair que l'on trouve $f(\nu)$ pour les couples de valeurs de i et j , choisies parmi les multiples de ν , non supérieurs à n . Conséquemment

$$\nabla = -D^{n-2} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[f(\nu) \left\{ G(\nu) + G(2\nu) + \dots + G\left(\left[\frac{n}{\nu}\right]\nu\right) \right\}^2 \right].$$

Par exemple, pour $G(x) = 1$, on trouve

$$\nabla = -D^{n-2} \sum_{v=1}^{v=n} \left[\frac{n}{v} \right]^2 f(v).$$

Si l'on imagine une fonction F_0 , définie par la relation

$$F_0(x) = \frac{f(a)}{a} + \frac{f(b)}{b} + \frac{f(c)}{c} + \dots,$$

on obtient définitivement

$$\left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & A_{i,j} \end{array} \right\|_n = -[f(1)f(2)\dots f(n)]^{n-2} \sum_{v=1}^{v=n} \left\{ 2v F_0(v) - F(v) \right\}.$$

Comme dernier exemple, faisons $G(x) = x$, de sorte que

$$\nabla = -\frac{D^{n-2}}{4} \sum_{v=1}^{v=n} v^2 f(v) \left[\frac{n}{v} \right]^2 \left\{ \left[\frac{n}{v} \right] + 1 \right\}^2.$$

Après quelques transformations simples, on obtient

$$\left\| \begin{array}{cc} 0 & i \\ j & A_{i,j} \end{array} \right\|_n = -[f(1)f(2)\dots f(n)]^{n-2} \sum_{v=1}^{v=n} v^3 F_0(v).$$