

V. MOLLAME

Sur les sommes des produits

$kA_k(k = 1, 2, 3, \dots)$ des nombres naturels

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 364-370

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__364_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES SOMMES DES PRODUITS k A k ($k = 1, 2, 3, \dots$)
DES NOMBRES NATURELS;**

PAR M. V. MOLLAME,
Professeur à l'Université de Catane (Sicile).

Soit $S_{k,n}$ la somme de tous les produits k à k des
nombres $1, 2, 3, \dots, n$. On aura

$$\begin{aligned} S_{k,n} &= 0, & \text{si } k > n, \\ \text{et} \quad S_{k,n} &= n!, & \text{si } k = n. \end{aligned}$$

Faisons, par convention,

$$S_{0,0} = 1, \quad S_{0,n} = 1, \quad S_{0,-1} = 1.$$

Cela posé, si n, r, μ, ω sont des nombres entiers po-

sitifs, et a, b deux nombres quelconques, on aura la relation

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & (a+b)^{n-\omega} S_{\omega, n-1} \\ &= \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu, r-1} S_{\omega-\mu, n-r-1} a^{r-\mu} b^{n-\omega-(r-\mu)}. \end{aligned} \right.$$

On sait, en effet, que, en posant

$$1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a+k)}{2!}x^2 + \frac{a(a+k)(a+2k)}{3!}x^3 + \dots \\ + \frac{a(a+k)\dots[a+(m-1)k]}{m!}x^m = \varphi(a),$$

où m est un nombre entier, aussi grand qu'on veut, on a

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a+b),$$

et, pour cela, si l'on désigne par A_r, B_s, C_n , respectivement, les coefficients de x^r, x^s, x^n dans $\varphi(a), \varphi(b), \varphi(a+b)$, on aura

$$(2) \quad C_n = \sum A_r B_s \quad \left\{ \begin{aligned} & r = 0, 1, 2, \dots, n \\ & s = n, n-1, n-2, \dots, 0 \end{aligned} \right\}.$$

Cependant on a

$$A_r = \frac{1}{r!} a(a+k)(a+2k)\dots[a+(r-1)k],$$

c'est-à-dire

$$A_r = \frac{1}{r!} (S_{0,r-1} a^r + S_{1,r-1} a^{r-1} k \\ + S_{2,r-1} a^{r-2} k^2 + \dots + S_{r-1,r-1} a k^{r-1})$$

et, pareillement,

$$B_s = \frac{1}{s!} (S_{0,s-1} b^s + S_{1,s-1} b^{s-1} k \\ + S_{2,s-1} b^{s-2} k^2 + \dots + S_{s-1,s-1} b k^{s-1}),$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n!} [S_{0,n-1} (a+b)^n \\ &+ S_{1,n-1} (a+b)^{n-1} k + \dots + S_{n-1,n-1} (a+b) k^{n-1}]. \end{aligned} \right.$$

Le terme de A_r qui contient k^μ et celui de B_s qui contient k^ν sont, respectivement,

$$\frac{1}{r!} S_{\mu, r-1} a^{r-\mu} k^\mu, \quad \frac{1}{s!} S_{\nu, s-1} b^{s-\nu} k^\nu,$$

et, pour cela, le terme avec $k^{\mu+\nu}$ dans $A_r B_s$ est

$$\frac{1}{r! s!} S_{\mu, r-1} S_{\nu, s-1} a^{r-\mu} b^{s-\nu} k^{\mu+\nu};$$

donc, en posant $\mu + \nu = \omega$,

$$\sum \frac{1}{r! s!} S_{\mu, r-1} S_{\nu, s-1} a^{r-\mu} b^{s-\nu} \begin{cases} r = 0, 1, 2, \dots, \omega \\ s = \omega, \omega-1, \omega-2, \dots, 0 \end{cases}$$

sera le coefficient de k^ω dans $A_r B_s$; on peut l'écrire encore

$$\frac{1}{r! s!} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu, r-1} S_{\omega-\mu, s-1} a^{r-\mu} b^{s-\omega+\mu},$$

et, pour cela, le coefficient de k^ω dans C_n sera, à l'aide de l'égalité (2),

$$\sum \frac{1}{r! s!} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu, r-1} S_{\omega-\mu, s-1} a^{r-\mu} b^{s-\omega+\mu} \\ (r = 0, 1, 2, \dots, n; s = n, n-1, n-2, \dots, 0)$$

ou, étant $s = n - r$ et $\frac{1}{r! (n-r)!} = \binom{n}{r} \frac{1}{n!}$,

$$\frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu, r-1} S_{\omega-\mu, n-r-1} a^{r-\mu} b^{n-\omega-(r-\mu)}.$$

Mais le coefficient de k^ω dans C_n est, en vertu de l'égalité (3),

$$\frac{1}{n!} S_{\omega, n-1} (a+b)^{n-\omega};$$

on a donc la relation (1), par suite de l'égalité des deux expressions du coefficient de k^ω .

Si $\omega = 0$, l'égalité (1) donne le théorème du binôme pour un exposant entier et positif.

2. On a aussi

$$\left(\begin{aligned} & \binom{n-\omega+1}{p} S_{\omega,n} \\ &= \binom{n+1}{p} S_{0,p-1} S_{\omega,n-p} - \binom{n+1}{p+1} S_{1,p} S_{\omega-1,n-p-1} \\ &+ \binom{n+1}{p+2} S_{2,p+1} S_{\omega-2,n-p-2} \dots - \binom{n+1}{\omega+p} S_{\omega,p+\omega-1} S_{0,n-p-\omega}, \end{aligned} \right)$$

c'est-à-dire

$$(2') \quad \binom{n-\omega+1}{p} S_{\omega,n} = \sum_{r=0}^{r=\omega} \binom{n+1}{p+r} S_{r,p+r-1} S_{\omega-r,n-p-r}.$$

En effet, si l'on pose, dans l'équation (1), $r - p = p$ et que l'on prenne, dans le second signe Σ , le terme qui résulte lorsque $p = r - p$,

$$\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} S_{r-p,r-1} S_{\omega-r+p,n-r-1} a^p b^{n-\omega-p}$$

sera la partie du second membre de l'équation (1) où figure $a^p b^{n-\omega-p}$. Dans la précédente expression, la valeur la plus petite que peut recevoir r dans $S_{r-p,r-1}$, c'est $r = p$. La valeur la plus grande que la même quantité r peut avoir dans $S_{\omega-r+p,n-r-1}$, c'est $r = \omega - p$, de manière que

$$\sum_{r=p}^{r=\omega+p} \binom{n}{r} S_{r-p,r-1} S_{\omega-r+p,n-r-1}$$

sera le coefficient de $a^p b^{n-\omega-p}$ dans le second membre de l'équation (1); mais le coefficient de $a^p b^{n-\omega-p}$ donné par le premier membre de la même égalité, c'est

$\binom{n-\omega}{p} S_{\omega, n-1}$: donc

$$\binom{n-\omega}{p} S_{\omega, n-1} = \sum_{r=p}^{r=\omega+p} \binom{n}{r} S_{r-p, r-1} S_{\omega-r+p, n-r-1},$$

et, si l'on change, dans cette dernière égalité, n en $n+1$ et r en $r+p$, on aura l'équation (2').

On a encore

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (n-k+1) S_{k,n} \\ = \sum_{r=0}^{r=k} \frac{(n+1) n(n-1) \dots (n-r+1)}{n+1} S_{k-r, n-r-1}, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} (n-k+1) S_{k,n} \\ = \frac{n+1}{1} S_{k, n-1} + \frac{(n+1)n}{2} S_{k-1, n-2} \\ + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} S_{k-2, n-3} + \dots \\ + \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-k+1)}{k+1} S_{0, n-k-1}. \end{array} \right.$$

On obtient l'égalité précédente par le changement de k en ω dans l'équation (2) : dans celle-ci, on fera $p=1$, et l'on se rappellera que

$$S_{r,r}=1$$

et que

$$\binom{n+1}{r+1} r! = \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-r+1)}{r+1}.$$

On a pareillement

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{k,n} = n S_{k-1, n-1} + (n-1) S_{k-1, n-2} \\ + (n-2) S_{k-1, n-3} + \dots + k S_{k-1, n-1}. \end{array} \right.$$

En effet, dans $S_{k,n}$, il y a des produits qui ont le facteur n . Ce sont ceux qui ont pour somme $n S_{k-1, n-1}$; les autres produits n'ont pas le facteur n et donnent pour

somme $S_{k,n-1}$, de sorte que l'on a

$$(5) \quad S_{k,n} = n S_{k-1,n-1} + S_{k,n-1}.$$

L'équation (4) est une conséquence immédiate de l'équation (5).

Si, dans l'équation (3'), on introduit la valeur de $S_{k,n-1}$ donnée par l'équation (5), on aura

$$\begin{aligned} k S_{k,n} = & n(n+1) S_{k-1,n-1} \\ & - \left[\frac{(n+1)n}{2} S_{k-1,n-2} \right. \\ & + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} S_{k-2,n-3} + \dots \\ & \left. + \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{k+1} S_{0,n-k+1} \right]. \end{aligned}$$

Cette égalité est la plus avantageuse, parmi les autres, par le calcul récurrent des quantités S .

On voit très facilement que

$$S_{0,n} + S_{1,n} + S_{2,n} + \dots + S_{n,n} = (n+1)!$$

$$S_{0,n} + S_{2,n} + S_{4,n} + \dots = S_{1,n} + S_{3,n} + S_{5,n} + \dots = \frac{1}{2}(n+1)!$$

si l'on fait $x = \pm 1$ dans l'identité

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n) = S_{0,n}x^n + S_{1,n}x^{n-1} + \dots + S_{n,n}.$$

On a, en particulier,

$$S_{2,n} = \frac{1}{4!} (n+1)n(n-1)(3n+2),$$

$$S_{3,n} = \frac{1}{4! \cdot 2} (n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2),$$

$$\begin{aligned} S_{4,n} = & \frac{1}{5! \cdot 2^2 \cdot 3} (n+1)n(n-1)(n-2) \\ & \times (n-3)(15n^3 + 15n^2 - 10n + 8), \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

L'équation (4) donne pour $S_{2,n}$ la valeur

$$\begin{aligned} S_{2,n} = & \frac{1}{2} [n^2(n-1) + (n-1)^2(n-2) \\ & + (n-2)^2(n-3) + \dots + 2^2 \cdot 1], \end{aligned}$$

(370)

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 2S_{2,n} &= n^3 + (n-1)^3 + \dots + 2^3 \\ &\quad - n^2 - (n-1)^2 - \dots - 2^2, \\ 2S_{2,n} + 2 &= \sum_1^n k^3 - \sum_1^n k^2. \end{aligned}$$

Les deux précédentes valeurs de $S_{2,n}$ donnent lieu à l'identité

$$\begin{aligned} 1.2^2 + 2.3^2 + \dots + (n-1)n^2 \\ = \frac{1}{3.4} (n+1)n(n-1)(3n+2). \end{aligned}$$

On pourrait avoir d'autres identités par la comparaison des valeurs de $S_{2,n}$, $S_{4,n}$,