

FRITZ HOFMANN

Une application élémentaire du théorème d'Abel

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 279-283

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__279_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE APPLICATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME D'ABEL;

PAR M. FRITZ HOFMANN.

PROBLÈME. — *Construire la formule pour $\cos(A + B)$
par la méthode d'Abel.*

I. Envisageons l'équation

$$(1) \quad (x+a)\sqrt{x} - b\sqrt{1-x} = 0$$

ou

$$(2) \quad (x+a)^2 x - b^2(1-x) = 0 = f(x).$$

Les trois racines x_1, x_2, x_3 de l'équation (2) dépendent des valeurs des constantes a et b (tandis que réciproquement ces constantes a, b sont déterminées par les valeurs de deux de ces racines).

Supposons des valeurs quelconques attribuées à ces constantes a, b , alors l'équation (2) nous fournirait aussi trois expressions analytiques pour les racines x_1, x_2, x_3 . Nous ne formerons pas ces expressions; leur existence nous assure, premièrement, que, pour des variations infiniment petites de a et b , les racines x_1, x_2, x_3 varient aussi infiniment peu, et deuxièmement qu'il est possible de tenir séparées l'une de l'autre ces trois racines de l'équation (2) pendant un mouvement continu des valeurs de a et b .

L'équation (1) permet les transformations

$$(3) \quad (x+a)x = b\sqrt{x-x^2},$$

$$(4) \quad (x+a)\sqrt{x-x^2} = b(1-x)$$

que nous allons employer tout de suite.

D'après ce que nous avons établi, il est permis de différentier par rapport à a, b, x l'équation (2)

$$f(x) = (x+a)^2 x - b^2(1-x) = 0 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

où x est employé pour marquer une des trois racines x_1, x_2, x_3 . Nous trouvons

$$f'(x)dx = 2[(x+a)x da - b(1-x)db] = 0.$$

En substituant les expressions (3) et (4), on a

$$f'(x)dx = 2[(x+a)\sqrt{x-x^2}db - b\sqrt{x-x^2}da]$$

ou

$$(5) \quad \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = 2 \frac{(x-a)db - bda}{f'(x)}.$$

En substituant les trois racines x_1, x_2, x_3 et en ajoutant, on en tire

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \\ & = 2 \int \sum \frac{(x+a)db - bda}{f'(x)}, \end{aligned} \right.$$

où le signe $\sum$ se rapporte aux trois différentes racines x_1, x_2, x_3 , et où les limites de l'intégrale à droite se déterminent par la position initiale et finale des valeurs a et b .

L'expression $\sum \frac{(x+a)db - bda}{f'(x)}$ s'évanouit identiquement. Pour voir cela, rappelons la formule connue

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x)}{f(x)} &= \frac{\psi(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \\ &= \frac{\psi(x_1)}{(x-x_1)f'(x_1)} + \frac{\psi(x_2)}{(x-x_2)f'(x_2)} + \frac{\psi(x_3)}{(x-x_3)f'(x_3)}, \end{aligned}$$

qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{(x+a)db - bda}{f(x)} &= \frac{(x_1+a)db - bda}{(x-x_1)f'(x_1)} \\ &\quad + \frac{(x_2+a)db - bda}{(x-x_2)f'(x_2)} + \frac{(x_3+a)db - bda}{(x-x_3)f'(x_3)}. \end{aligned}$$

En multipliant, on en tire

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} (x+a)db - bda &= \frac{(x_1+a)db - bda}{f'(x_1)} (x-x_2)(x-x_3) \\ &\quad - \frac{(x_2+a)db - bda}{f'(x_2)} (x-x_1)(x-x_3) \\ &\quad - \frac{(x_3+a)db - bda}{f'(x_3)} (x-x_1)(x-x_2), \end{aligned} \right.$$

ce qui est une identité.

A droite de (7), le coefficient de x^2 est justement la somme $\sum \frac{(x+a)db - bda}{f'(x)}$, et il faut bien qu'elle s'évalue, puisqu'il n'y a pas de deuxième puissance de x à gauche.

Donc l'équation (6) nous donne d'abord

$$(8) \quad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x-x_2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x-x_2}} + \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x-x_2}} = C.$$

Il s'agit maintenant d'établir la dépendance des trois racines x_1, x_2, x_3 entre elles. Étant données x_1 et x_2 , on les substituera dans (1) pour obtenir les valeurs de a et b en fonction de x_1 et x_2 ,

$$(9) \quad \begin{cases} (x_1 + a)\sqrt{x_1} - b\sqrt{1-x_1} = 0, \\ (x_2 + a)\sqrt{x_2} - b\sqrt{1-x_2} = 0. \end{cases}$$

En éliminant a , on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(10) \quad b = -\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}(\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}).$$

Mais, par l'équation (2), on apprend que le produit des trois racines x_1, x_2, x_3 est égal à b^2 ; donc

$$(11) \quad x_3 = (\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1})^2.$$

On en conclut que $x_3 = 0$ pour $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; donc $C = 0$ dans l'équation (8). Elle se transforme en

$$(12) \quad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x-x_2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x-x_2}} + \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x-x_2}} = 0.$$

Nous voilà à même de formuler le théorème suivant :

Quand il existe entre les trois valeurs x_1, x_2, x_3 la relation (12), on a en même temps

$$x_3 = (\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1})^2.$$

II. Faisons la substitution $x = \frac{1+z}{2}$; alors les réductions nécessaires faites, le même théorème s'énonce comme il suit :

Étant donné

$$(13) \quad \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = - \int_0^{z_3} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

on a en même temps

$$\frac{1+z_3}{2} = \frac{1}{4} [2 - 2z_1z_2 + 2\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}]$$

ou

$$(14) \quad z_3 = \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} - z_1z_2.$$

Mais les équations (13) et (14) contiennent la solution du problème proposé.

Posons

$$\int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = A,$$

$$\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = B,$$

$$- \int_0^{z_3} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = C';$$

$$A + B = C'.$$

On a

$$z_1 = \sin A, \quad z_2 = \sin B, \quad z_3 = \cos C' = \cos(A + B).$$

L'équation (14) nous dit que

$$z_1 = \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B. \quad \text{c. q. f. d.}$$