

E. CESÀRO

Sur la série de Lambert

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 106-109

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__106_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SÉRIE DE LAMBERT;

PAR M. E. CESARO.

1. D'après une formule connue, on peut écrire

$$(1) \quad \frac{1}{p} + v_p = \frac{1}{2} \log \frac{p+1}{p-1},$$

où

$$(2) \quad v_p = \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} + \frac{1}{7p^7} + \dots < \frac{1}{6} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p} \right).$$

Dans l'égalité (1), donnons successivement à p les valeurs $u_1, u_2, \dots, u_n$, et additionnons, après avoir posé

$$(3) \quad \begin{cases} U_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}, \\ V_n = v_{u_1} + v_{u_2} + \dots + v_{u_n}. \end{cases}$$

Il vient

$$(4) \quad U_n + V_n = \frac{1}{2} \log \frac{(u_1+1)(u_2+1)\dots(u_n+1)}{(u_1-1)(u_2-1)\dots(u_n-1)}.$$

2. La formule (4) est susceptible de nombreuses applications. En particulier, on peut l'utiliser pour évaluer approximativement la somme des n premiers termes de la *série de Lambert*, c'est-à-dire

$$S_n = \frac{r}{1-r} + \frac{x^2}{1-x^2} + \dots + \frac{x^n}{1-x^n}.$$

(107)

x étant compris entre 0 et 1. Prenons, à cet effet,

$$u_p = \frac{1+x}{x^p} - \frac{1-x^p}{1-x},$$

de sorte que

$$\frac{u_{p-1}-1}{u_{p-1}} = x, \quad U_n = \frac{1-x}{1-x} S_n.$$

La formule (4) devient

$$(5) \quad U_n + V_n = \frac{1}{2} \log \left(1 + 2x \frac{1-x^n}{1-x} \right).$$

3. On reconnaît sans peine, au moyen de l'inégalité (2), que, pour n indéfiniment croissant, V_n tend vers une limite finie V , supérieure à V_n . D'autre part, en vertu de la même inégalité, on a

$$\begin{aligned} V - V_n &\leq \frac{1}{6} \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \left(\frac{1}{u_{p-1}} - \frac{1}{u_p} - \frac{2}{u_p} \right) \\ &\leq \frac{1}{6} \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \left(\frac{x}{u_{p-1}} - \frac{1}{u_p} \right), \end{aligned}$$

ou bien

$$(6) \quad V - V_n \leq \frac{1}{6} \left[\frac{x}{u_n} - (1-x)(U - U_n) \right].$$

Or, à cause de

$$u_p > \frac{1+x}{1-x} \frac{1}{x^p}, \quad U - U_n = \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \frac{1}{u_p},$$

on a

$$U - U_n > \frac{1-x}{1+x} \sum_{p=n+1}^{p=\infty} x^p = \frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{1-x^n}{1-x} \frac{x}{u_n}.$$

On peut donc, au lieu de (6), écrire, à plus forte raison,

$$V - V_n < \frac{x^{n+1}}{6u_n}, \quad V_n = V - \frac{\theta x^{n+1}}{6u_n},$$

θ étant une fraction proprement dite.

4. Par substitution dans (5), on trouve

$$\frac{1-x}{1+x} S_n = \frac{1}{2} \log \left(1 + 2x \frac{1-x^n}{1-x} \right) - \frac{6x^{n+1}}{6u_n} + V,$$

c'est-à-dire

$$(7) \sum_{p=1}^{p=n} \frac{x^p}{1-x^p} = \frac{1+x}{1-x} \log \sqrt{\frac{1}{2} + x \frac{1-x^n}{1-x} + \frac{6x^{2n+1}}{6(1-x^n)}} + \text{const.}$$

Par *constante* nous entendons une fonction de x , *indépendante* de n . Pour n infini, on obtient

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{1-x^p} = \frac{1+x}{1-x} \log \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1+x}{1-x}} + \text{const.},$$

ce qui nous donne l'interprétation de la *constante*. D'après cela, l'égalité (7) peut prendre cette autre forme

$$(8) \sum_{p=n+1}^p \frac{x^p}{1-x^p} = \frac{1+x}{1-x} \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x-2x^{n+1}}} + \frac{6x^{2n+1}}{6(1-x^n)}.$$

5. Si, après avoir multiplié par $1-x$ les membres de (7), on fait $x=1$, on trouve la formule connue

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \log \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{6}{6n}.$$

D'ailleurs, l'application *directe* de la formule (4) à l'évaluation de la somme des n premiers termes de la *série harmonique* permet d'obtenir des expressions beaucoup plus approchées. Si l'on fait, par exemple, $u_p = p+1$, en ne considérant que $n-1$ termes dans les séries (3), on trouve

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \log \sqrt{n(n+1)} + \frac{6}{6n(n+1)}.$$

6. Pour une valeur *donnée* de x , on peut toujours

(109)

trouver la somme de la *série de Lambert*, avec une approximation aussi grande qu'on le désire, en faisant usage de la formule (8), dans laquelle on attribue à n une valeur suffisamment grande. Proposons-nous, par exemple, de calculer la somme

$$S = \frac{1}{10-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{10^3-1} + \frac{1}{10^4-1} + \dots,$$

avec *sept* décimales exactes. Il suffit de prendre $n = 3$ dans (8), après quoi il vient

$$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} + \frac{1}{999} + \frac{11}{18} \log \frac{5500}{5499} = 0,1223242 \dots$$

Cet exemple admet une vérification facile. Le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal doit, en effet, représenter le *nombre des diviseurs de n* pour les *quarante-six* premières valeurs de n .