HERMITE

Sur une identité trigonométrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 57-59

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__57_0>

SUR UNE IDENTITÉ TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR M. HERMITE.

M. J.-W.-L. Glaisher, professeur à Cambridge, a donné sans démonstration la relation suivante, où a, b, c, f, g, h sont des quantités quelconques, à savoir [1] :

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(a-f)\sin(a-g)\sin(a-h)}{\sin(a-b)\sin(a-c)}\\
&+\frac{\sin(b-f)\sin(b-g)\sin(b-h)}{\sin(b-a)\sin(b-c)}\\
&+\frac{\sin(c-f)\sin(c-g)\sin(c-h)}{\sin(c-a)\sin(c-b)}\\
&+\frac{\sin(f-a)\sin(f-b)\sin(f-c)}{\sin(f-g)\sin(f-h)}\\
&+\frac{\sin(g-a)\sin(g-b)\sin(g-c)}{\sin(g-f)\sin(g-h)}\\
&+\frac{\sin(h-a)\sin(h-b)\sin(h-c)}{\sin(h-f)\sin(h-g)}=0.
\end{aligned}$$

L'éminent géomètre a de plus remarqué que la somme des trois premiers termes est égale à

$$\sin(a+b+c-f-g-h);$$

or, on voit qu'en changeant a, b, c en f, g, h, et réciproquement, le sinus se reproduit sauf le signe; il suffit donc d'ajouter les deux expressions pour obtenir immédiatement la relation annoncée. Ce résultat intéressant peut se généraliser et se démontrer comme il suit.

Considérons la fonction

$$f(x)=\frac{\sin(x-f)\sin(x-g)\ldots\sin(x-s)}{\sin(x-a)\sin(x-b)\ldots\sin(x-l)},$$

[1] Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Reims, séance du 17 août 1880.

où je suppose que les facteurs soient en même nombre au numérateur et au dénominateur. Désignons par A, B, ..., L les résidus correspondant aux pôles $x = a$, b, ..., l, de sorte qu'on ait

$$A = \frac{\sin(a-f)\sin(a-g)\ldots\sin(a-s)}{\sin(a-b)\sin(a-c)\ldots\sin(a-l)},$$
$$B = \frac{\sin(b-f)\sin(b-g)\ldots\sin(b-s)}{\sin(b-a)\sin(b-c)\ldots\sin(b-l)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

J'emploierai la relation

$$A + B + \ldots + L = \frac{H - G}{2i},$$

où G et H désignent les valeurs de $f(x)$, lorsque, ayant fait $z = e^{ix}$, on suppose z nul et infini (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 328).

Ces valeurs s'obtiennent facilement; on a, en effet,

$$\frac{\sin(x-f)}{\sin(x-a)} = \frac{z^2 e^{-if} - e^{if}}{z^2 e^{-ia} - e^{ia}};$$

d'où, pour $z = 0$ et z infini, les quantités

$$e^{i(f-a)} \text{ et } e^{-i(f-a)}.$$

Soit donc, pour un moment,

$$u = a + b + \ldots + l,$$
$$v = f + g + \ldots + s;$$

nous aurons sur-le-champ

$$G = e^{-i(u-v)}, \quad H = e^{i(u-v)},$$

et par suite

$$A + B + \ldots + L = \sin(u - v).$$

Maintenant il suffit de permuter a et f, b et g, ..., l et s pour obtenir l'équation de M. Glaisher. Qu'on désigne en effet par F, G, ..., S ce que deviennent alors les quantités A, B, ..., L; la relation précédente donne

$$F + G + \ldots - S = - \sin(u - v),$$

et l'on en conclut l'identité

$$A + B + \ldots + L + F + G - \ldots + S = 0.$$