

JUHEL-RÉNOY

Théorèmes sur l'ellipse et l'hyperbole équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 460-463

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__460_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES SUR L'ELLIPSE ET L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE;

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

THÉORÈME. — *On joint un point M d'une ellipse aux extrémités A, A' du grand axe. Soient P, Q les points d'intersection de MA' et MA avec la directrice relative au foyer F.*

L'angle PFQ est droit ⁽¹⁾.

Réciproquement, si un segment PQ de la directrice est vu du foyer F sous un angle droit, les droites QA, PA' se coupent sur l'ellipse.

En effet, l'équation de l'ellipse étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

les équations des droites MA, MA' peuvent s'écrire

$$\frac{y}{b} = \lambda \left(1 - \frac{x}{a} \right), \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{a} \right).$$

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Soit C le point d'intersection du grand axe et de la directrice, on a

$$PC = \frac{b}{\lambda} \left(1 + \frac{a}{c} \right) \quad \text{et} \quad CQ = -b\lambda \left(1 - \frac{a}{c} \right) :$$

donc

$$PC \cdot CQ = -b^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) = \frac{b^4}{c^2} = \overline{FC}^2 ;$$

par conséquent, l'angle PFQ est droit.

Démontrons la réciproque.

Soient $PC = y_1$ et $CQ = -y_2$.

On a, par hypothèse,

$$y_1 y_2 = -\frac{b^4}{c^2}.$$

L'équation de PA' est

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x + a}{\frac{a^2}{c} + a},$$

et l'équation de QA

$$\frac{y}{y_2} = \frac{x - a}{\frac{a^2}{c} - a}.$$

On a donc, pour le lieu du point de rencontre des deux droites,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

équation de l'ellipse considérée.

THÉORÈME. — Soient M et M' les extrémités de deux demi-diamètres conjugués OM, OM' d'une ellipse, et F un foyer.

La droite M'H parallèle à MF est tangente au cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

En effet, soient $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ l'équation de l'ellipse, et $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$ l'abscisse et l'ordonnée du point M ; les coordonnées de M' seront $-a \sin \varphi$, $b \cos \varphi$,

et l'équation de M'H sera

$$(1) \quad bx \sin \varphi - (bc + ay) \cos \varphi = -(ab + cy).$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, prenons la dérivée de l'équation (1), par rapport à φ ,

$$(2) \quad bx \cos \varphi + (bc + ay) \sin \varphi = 0.$$

Élevons au carré les équations (1) et (2), et ajoutons-les; nous aurons, pour l'équation de l'enveloppe,

$$x^2 + y^2 = a^2 - c^2 = b^2,$$

ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME. — Soit un triangle rectangle inscrit dans une hyperbole équilatère :

Les côtés de l'angle droit AB, AC interceptent sur les asymptotes deux segments dont les milieux sont sur le cercle des neuf points du triangle.

Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés AB, AC; et soient $AB = a$, $AC = b$.

L'équation d'une hyperbole équilatère circonscrite au triangle sera

$$x^2 - y^2 + \lambda xy - ax + by = 0.$$

Soit $y = cx + d$ l'équation d'une asymptote; c et d vérifient les équations

$$\begin{aligned} 1 - c^2 + \lambda c &= 0, \\ (\lambda - 2c)d - a + bc &= 0. \end{aligned}$$

De ces deux équations on déduit, en éliminant λ ,

$$(1) \quad (c^2 + 1)d + ac - bc^2 = 0.$$

Or, pour démontrer la proposition énoncée, il suffit de faire voir que le point, dont les coordonnées sont

$$y = \frac{d}{2}, \quad x = -\frac{d}{2c} = -\frac{y}{c},$$

est sur le cercle des neuf points du triangle.

Remplaçons dans la relation (1) d par $2y$, et c par $-\frac{y}{x}$, nous aurons entre les coordonnées x, y l'équation

$$2(x^2 + y^2) - ax - by = 0,$$

qui représente le cercle des neuf points du triangle rectangle ABC. •

La proposition est ainsi démontrée.
