

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 432-435

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__432_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1456

(voir 3^e série, t. II, p. 336);

PAR M. DROZ.

*Soient a, a' ; b, b' ; c, c' les points d'intersection
d'une conique et des côtés BC, CA, AB d'un triangle*

ABC; démontrer que les six droites $Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc'$ enveloppent une autre conique.

(H. SCHROETER.)

Solution.

On sait que les tangentes, menées des sommets A, B, C d'un triangle ABC, à une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, rencontrent les côtés opposés BC, CA, AB respectivement, suivant des groupes de n points $a, a', a'', \dots, b, b', b'', \dots, c, c', c'', \dots$, tels que la relation

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{a'B}{a'C} \cdots \frac{bC}{bA} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdots \frac{cA}{cB} \cdot \frac{c'A}{c'B} \cdots = (-1)^n$$

est vérifiée. (CHASLES, *Géométrie supérieure*, deuxième édition, p. 355, § 508.)

Les cinq droites Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' enveloppent une conique déterminée; on peut lui mener du point A une seconde tangente, et, en désignant par X le point de rencontre de cette tangente et du côté BC, on aura, d'après la relation générale qui précède,

$$(1) \quad \frac{XB}{XC} \cdot \frac{a'B}{a'C} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{cA}{cB} \cdot \frac{c'A}{c'B} = 1.$$

Mais, entre les segments déterminés sur les côtés du triangle ABC par cette conique, on a, d'après le théorème de Carnot,

$$(2) \quad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{a'B}{a'C} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{cA}{cB} \cdot \frac{c'A}{c'B} = 1.$$

Les égalités (1) et (2) donnent $\frac{XB}{XC} = \frac{aB}{aC}$; il en faut conclure que les points X, a coïncident : donc les six droites $Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc'$ enveloppent une conique.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1461(voir 3^e série, t. II, p. 387);

PAR UN ANONYME.

Par un des points d'intersection A (fig. 1) de deux hyperboles équilatères, de même centre O, on mène une sécante qui rencontre les deux courbes en B, B'; de ces points on abaisse des perpendiculaires BC, B'C' sur les tangentes aux deux courbes, au même point A; démontrer que l'angle COC' est quadruple de l'angle des asymptotes. (E. FAUQUEMBERGUE.)

Tout se réduit à faire voir que l'angle COC' (fig. 1) est le double de l'angle CAC'' des tangentes AC, AC''; car on sait déjà que ce dernier angle est le double de

Fig. 1.

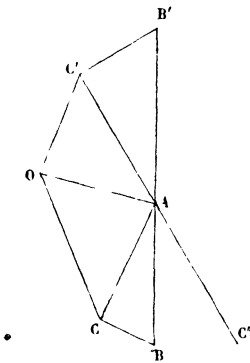
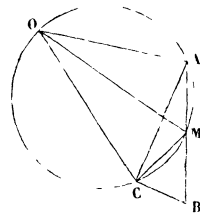


Fig. 2.



celui des asymptotes (voir 3^e série, t. II, p. 332). Or l'égalité $COC' = 2CAC''$ résulte des considérations suivantes.

Soient A (fig. 2) un point d'une hyperbole équilatère dont O est le centre; AC une tangente; M le milieu

d'une corde AB, issue du point A; C la projection de l'extrémité B de cette corde sur la tangente.

L'angle AOM des droites OA, OM, menées du centre au point de contact A et au milieu M de la corde AB, est égal à l'angle CAM de la tangente et de la corde. C'est une proposition connue ⁽¹⁾.

Mais, le point M étant le milieu de l'hypoténuse AB du triangle rectangle ACB, l'angle CAM = ACM; donc

$$AOM = ACM,$$

il s'ensuit que les quatre points A, M, C, O appartiennent à une même circonférence. Dans cette circonférence, les cordes AM, MC étant égales entre elles, les arcs sous-tendus AM, MC sont de même égaux; donc l'angle

$$AOC = 2CAM = 2CAB.$$

Ainsi (*fig. 1*), on a $AOC = 2CAB$, de même

$$AOC' = 2C'AB' = 2C''AB;$$

d'où

$$COC' = 2(CAB + C''AB) = 2CAC''.$$

C. Q. F. D.

Note. — MM. Moret-Blanc et Barisien ont résolu la même question au moyen des calculs de la Géométrie analytique.

(1) En voici la démonstration. Soient D et D' les points de rencontre de l'une des deux asymptotes de l'hyperbole équilatère, et des droites CA, MA prolongées. On a AD = OA, MD' = OM; par suite les égalités d'angles :

$$AOD = ADO, \quad MOD' = MD'O, \quad MOD' - AOD = MD'O - ADO,$$

ou

$$AOM = DAD' = CAM. \quad (G.)$$