

S. RÉALIS

Solutions des mêmes questions

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 429-431

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__429_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DES MÊMES QUESTIONS;

PAR M. S. RÉALIS.

I. *La forme $y^4 - 6y^2z^2 + z^4$, où y et z sont différents de zéro, ne peut jamais représenter un carré.*

(EULER.)

Cela étant, l'équation

$$(x + \alpha)^4 - 6(x + \alpha)^2(x - \alpha)^2 + (x - \alpha)^4 = 4(2\alpha x + \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 + \beta^2 = 0,$$

est impossible en entiers α , β , x , excepté :

1^o Pour $x = -\alpha$; d'où

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \pm \alpha^2;$$

2^o Pour $x = \alpha$; d'où

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = -\alpha^2.$$

De là l'énoncé I.

II. *La forme $y^4 + 6y^2z^2 + z^4$, dans laquelle y et z*

sont différents de zéro, ne peut jamais représenter un carré.

(EULER.)

Donc l'équation

$$(x + \alpha)^4 + 6(x + \alpha)^2(x - \alpha)^2 + (x - \alpha)^4 = 16(\alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 - 2\beta^2 = 0,$$

est impossible en entiers α, β, x ; excepté :

1° Pour $x = -\alpha$; dans ce cas, on a

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = -2\alpha^2;$$

2° Pour $x = \alpha$; auquel cas on a

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = 2\alpha^2.$$

III. *La forme $4x^4 + y^4$, dans laquelle x et y sont différents de zéro, ne peut jamais représenter un carré.*

(EULER.)

Donc l'équation

$$4x^4 + (x + \alpha)^4 = (2x^2 + \alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 + (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x + \alpha^4 - \beta^2 = 0.$$

est impossible en entiers α, β, x ; excepté :

Pour $x = 0$; d'où $\beta = \pm \alpha^2$;

Pour $x = -\alpha$; d'où

$$\beta = -\alpha^2 \quad \text{ou} \quad \beta = 3\alpha^2.$$

IV. *La forme $2x^4 + y^4$, dans laquelle x est différent de zéro, ne peut jamais représenter un carré.*

(EULER.)

D'après cela, l'équation

$$2x^4 + (x - \alpha)^4 = (2x^2 - \alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - \beta^2) = 0,$$

ne peut être vérifiée en nombres entiers α , β , x , excepté pour $x = 0$; d'où $\beta = \pm \alpha^2$.

V. *La forme $y^4 - 4x^4$, dans laquelle x est différent de zéro, ne peut jamais représenter un carré.*

(EULER.)

Donc l'équation

$$(x - \alpha)^4 - 4x^4 = (x^2 - 2\alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire l'équation à coefficients entiers

$$x^4 - \frac{\alpha^2 + \beta}{2} x^2 + \alpha(\alpha^2 + \beta)x - \frac{\alpha^4 - \beta^2}{4} = 0,$$

où nous supposons que α et β sont des nombres entiers de même parité, est impossible pour x entier, excepté pour $x = 0$, $\beta = \pm \alpha^2$.