NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Généralisation de l'identité de MM. Tchébychew et De Polignac

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4 (1885), p. 418-422

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__418_0>

GÉNÉRALISATION DE L'IDENTITÉ DE MM. TCHÉBYCHEW ET DE POLIGNAC;

Par M. E. CESARO.

1. *$p(x)$ étant le produit des nombres premiers, non supérieurs à x, soit*

$$(1)\qquad P_r(x) = p\left(x^{\frac{1}{r}}\right) p\left(x^{\frac{1}{2r}}\right) p\left(x^{\frac{1}{3r}}\right)\ldots;$$

on a identiquement

$$(2)\quad P_r\left[\frac{n}{1}\right] P_r\left[\frac{n}{2}\right] P_r\left[\frac{n}{3}\right]\cdots = 1^{F_r\left[\frac{n}{1^r}\right]}\, 2^{F_r\left[\frac{n}{2^r}\right]}\, 3^{F_r\left[\frac{n}{3^r}\right]}\ldots.$$

Dans cette égalité, $F_r(x)$ représente la quotité des nombres entiers, non supérieurs à x, et n'admettant pas de diviseurs, autres que 1, qui soient des puissances $r^{\text{ièmes}}$ parfaites.

2. Soit $f(x)$ une fonction de x, généralement égale à l'unité, sauf lorsque $x = \varpi^m$, ϖ étant un nombre premier quelconque, et m étant divisible par r : dans ce cas, $f(x) = \varpi$. Cela posé, désignons par $a, b, c, \ldots$ tous les diviseurs de x, et évaluons, en fonction des facteurs premiers $u, v, w, \ldots$ de x, le produit

$$f(a) f(b) f(c)\ldots.$$

Soit $x = u^\alpha v^\beta w^\gamma\ldots$. On a

$$f(u^r) = f(u^{2r}) = f(u^{3r}) = \ldots = f\left(u^{\left[\frac{\alpha}{r}\right]r}\right) = u,$$

$$f(v^r) = f(v^{2r}) = f(v^{3r}) = \ldots = f\left(v^{\left[\frac{\beta}{r}\right]r}\right) = v,$$

. . . .

Il est évident qu'il n'y a pas d'autres diviseurs de x

pour lesquels la fonction f soit différente de l'unité; par conséquent

$$f(a)f(b)f(c)\ldots = u^{\left[\frac{\alpha}{r}\right]} v^{\left[\frac{\beta}{r}\right]} w^{\left[\frac{\gamma}{r}\right]}\ldots = d_r(x),$$

pourvu que l'on représente par $d_r^r(x)$ le plus grand diviseur de x, puissance $r^{\text{ième}}$ parfaite. Si l'on observe que les nombres $\frac{x}{a}, \frac{x}{b}, \frac{x}{c}, \cdots$ sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres $a, b, c, \ldots$, on peut écrire

$$f\left(\frac{x}{a}\right) f\left(\frac{x}{b}\right) f\left(\frac{x}{c}\right)\cdots = d_r(x).$$

3. Dans la dernière relation, faisons successivement $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, et multiplions membre à membre toutes les égalités obtenues. Le nombre t entre, dans le premier membre, en dénominateur, pour les valeurs suivantes de x,

$$t,\ 2t,\ 3t,\ \ldots\ \left[\frac{n}{t}\right]t,$$

et, par conséquent, il donne lieu au produit

$$f\left[\frac{t}{t}\right] f\left[\frac{2t}{t}\right]\cdots f\left(\frac{\left[\frac{n}{t}\right]t}{t}\right) = f(1)f(2)\ldots f\left[\frac{n}{t}\right],$$

égal à $P_r\left[\frac{n}{t}\right]$, si l'on pose

$$P_r(x) = f(1)f(2)f(3)\ldots f(x). \tag{3}$$

Faisant varier t, depuis 1 jusqu'à n, on obtient

$$P_r\left[\frac{n}{1}\right] P_r\left[\frac{n}{2}\right] P_r\left[\frac{n}{3}\right]\cdots = d_r(1)\,d_r(2)\ldots d_r(n). \tag{4}$$

4. La fonction P_r est *définie* par la relation (3), que l'on peut mettre sous une autre forme. A cet effet, distinguons parmi les x premiers nombres naturels : 1° ceux qui sont des puissances $r^{\text{èmes}}$ parfaites de nombres

premiers, et dont les racines $r^{\text{ièmes}}$ sont, par conséquent, *tous les nombres premiers, non supérieurs* à $x^{\frac{1}{r}}$; ces nombres donnent lieu, dans le second membre de (3), au produit $p\left(x^{\frac{1}{r}}\right)$; 2° ceux qui sont des puissances $(2r)^{\text{ièmes}}$ parfaites de nombres premiers, et dont les racines $(2r)^{\text{ièmes}}$ sont, par conséquent, *tous les nombres premiers, non supérieurs à* $x^{\frac{1}{2r}}$; ces nombres donnent lieu, dans le second membre de (3), au produit $p\left(x^{\frac{1}{2r}}\right)$; 3° etc. D'après cela, on peut écrire

$$P_r(x) = p\left(x^{\frac{1}{r}}\right) p\left(x^{\frac{1}{2r}}\right) p\left(x^{\frac{1}{3r}}\right)\ldots,$$

ainsi que le suppose la relation (1).

5. Transformons aussi le second membre de l'égalité (4). A cet effet, observons que, pour avoir $d_r(x) = t$, il faut d'abord que x soit un multiple de t^r : il faut, ensuite, que le quotient de x par t^r n'admette pas de diviseurs, autres que 1, qui soient des puissances $r^{\text{ièmes}}$ parfaites. Le nombre des valeurs de x, non supérieures à n, pour lesquelles $d_r(x) = t$, est donc égal à la quotité des nombres, non supérieurs à $\frac{n}{t^r}$ et n'admettant pas de diviseurs autres que 1, qui soient des puissances $r^{\text{ièmes}}$ parfaites. L'identité (2) est donc démontrée.

6. *Remarque.* — Pour $r = 1$, on a $F_1(x) = 1$, pourvu que x ne soit pas nul. Dans ce cas, on a toujours $F_r(0) = 0$. Conséquemment, l'identité (2) devient

$$P_1\left[\frac{n}{1}\right] P_1\left[\frac{n}{2}\right] P_1\left[\frac{n}{3}\right]\cdots = 1.2.3\ldots n.$$

C'est l'identité de MM. Tchebychew et de Polignac.

Il est probable que l'identité (2) conduit aussi à une généralisation des intéressants résultats auxquels MM. Tchebychew et de Polignac sont parvenus, dans le cas particulier de $r = 1$. Il convient, toutefois, de faire observer que P_r n'est pas une fonction essentiellement nouvelle, car elle dépend de P_1 par la relation

$$P_r(x) = P_1(\sqrt[r]{x}).$$

La formule (2) exprime donc une propriété de la fonction $P_1(x) = e^{\chi(x)}$, sur laquelle nous reviendrons ultérieurement, en la considérant comme le *plus petit multiple commun des x premiers nombres naturels* (1).

7. On reconnaît aisément que, si l'on représente par $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots$ la série des nombres premiers $2, 3, 5, \ldots$, on a

$$(5)\quad \begin{cases} F_r(x) = x - \sum\left[\frac{x}{\varpi_1^r}\right] \\ \qquad\qquad - \sum\left[\frac{x}{\varpi_1^r \varpi_2^r}\right] - \sum\left[\frac{x}{\varpi_1^r \varpi_2^r \varpi_3^r}\right] + \ldots. \end{cases}$$

Asymptotiquement,

$$F_r(x) = x\left(1 - \frac{1}{\varpi_1^r}\right)\left(1 - \frac{1}{\varpi_2^r}\right)\left(1 - \frac{1}{\varpi_3^r}\right)\cdots = \frac{x}{s_r}.$$

Nous déduisons de là ce théorème :

La probabilité qu'un nombre entier n'admette pas de diviseurs, autres que 1, *qui soient des puissances* $r^{ièmes}$ *parfaites, est exprimée par l'inverse de la somme* $1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots.$

En particulier, pour $r = 4$, on trouve qu'*il y a envi-*

---

(1) $\chi(x)$ est la *fonction de Tchebychew*. D'après M. Halphen, elle est *asymptotique à x*.

ron douze à parier contre un qu'un nombre entier, pris au hasard, n'admet pas de diviseurs bicarrés, autres que l'unité.

8. **La formule** (5) peut être mise sous la forme

$$F_r(x) = \left[\frac{x}{1^r}\right]\mu(1) + \left[\frac{x}{2^r}\right]\mu(2) + \left[\frac{x}{3^r}\right]\mu(3) + \ldots(^1),$$

et l'on peut alors en déduire, avec plus de rigueur, l'expression asymptotique de $F_r(x)$. Observons, à cet effet, que, dans le second membre, les termes dont le rang est supérieur à $x^{\frac{1}{r}}$ sont nuls. On peut donc, à chaque quotient $\left[\frac{x}{t^r}\right]$, substituer $\frac{x}{t^r}$; car, en opérant ainsi, on vient à négliger une quantité certainement inférieure à la valeur absolue de $\mu(1) + \mu(2) + \ldots + \mu\left(x^{\frac{1}{r}}\right)$, et, partant, d'un ordre non supérieur à celui de $x^{\frac{1}{r}}$. Conséquemment, si r surpasse 1, on peut écrire

$$F_r(x) = x\sum_{t=1}^{t=\infty}\frac{\mu(t)}{t^r} = \frac{x}{s_r}.$$