

J.-B. POMEY

De la partition des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 408-417

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__408_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE LA PARTITION DES NOMBRES;

PAR M. J.-B. POMEY.

Soit proposée l'équation

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \dots + m\lambda_m = n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ne pouvant recevoir que les valeurs 0 ou 1.

J'appelle A_n^m le nombre de systèmes différents de valeurs pour $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ qui vérifient cette égalité. Autrement dit, A_n^m est le nombre de solutions de l'équation

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=m} i\lambda_i = n.$$

Voici quelques propriétés des nombres A_n^m :

Première proposition. — A tout système de valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ correspond un système de valeurs $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots, \lambda'_m$, tel que l'on a, quel que soit i , $\lambda_i + \lambda'_i = 1$. Dès lors, à la solution $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ de l'équation (1) correspond une solution de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m} i\lambda'_i = \frac{m(m+1)}{2} - n,$$

et cette solution est $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m$, et réciproquement.

On a donc $A_n^m = A_{n'}^m$ pour $n + n' = \frac{m(m+1)}{2}$.

Deuxième proposition. — Le nombre A_n^m est égal au

nombre de solutions de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} i\lambda_i = n.$$

augmenté du nombre de solutions de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} i\lambda_i = n - m;$$

car λ_m ne peut avoir que les valeurs 0 et 1. Nous avons ainsi partagé les solutions en deux groupes : dans le premier, $\lambda_m = 0$; dans le second, $\lambda_m = 1$. Donc

$$A_n^m = A_n^{m-1} + A_{n-m}^{m-1}.$$

Troisième proposition. — J'attribue aux λ toutes les valeurs qu'ils peuvent avoir; j'aurai alors A_0^m fois le nombre 0, A_1^m fois le nombre 1, A_2^m fois le nombre 2 et $A_{\frac{m(m+1)}{2}}^m$ fois le nombre $\frac{m(m+1)}{2}$, en formant toutes les combinaisons des deux signes + 1 et 0 pour les λ dans $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + m\lambda_m$.

Or je formerai le Tableau des diverses combinaisons obtenues pour

$$\lambda_m, \lambda_{m-1}, \lambda_{m-2}, \dots, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1,$$

en écrivant tous les nombres de la numération binaire, et ayant soin de remplacer par des zéros les chiffres manquant sur la gauche; je m'arrêterai au nombre 111...1, le nombre des unités étant m .

J'aurai le Tableau suivant :

λ_m	λ_{m-1}	λ_{m-2}	...	λ_4	λ_3	λ_2	λ_1
0	0	0	...	0	0	0	0
0	0	0	...	0	0	0	1
0	0	0	...	0	0	1	0
.	.	.	...	0	0	1	1

(410)

.	.	.	...	0	1	0	0
.	.	.	...	0	1	0	1
.	.	.	...	0	1	1	0
.	.	.	...	0	1	1	1
.	.	.	...	1	0	0	0
.	.	.	...	1	0	0	1
0	0	0	...	1	0	1	0
.	.	.	...	1	0	1	1
.	.	.	...	.	.	.	.
1	.	.	...	.	.	.	.
1	.	.	...	.	.	.	.
1	.	.	...	.	.	.	.
1	1	1	...	1	1	1	1

Dans chaque colonne, j'ai le même nombre d'unités : 2^{m-1} . Donc

$$\Sigma \lambda_1 = \Sigma \lambda_2 = \dots = \Sigma \lambda_m = 2^{m-1},$$

et, par suite, j'ai

$$\begin{aligned} \Lambda_0^m &= \Lambda_1^m + \Lambda_2^m + \dots + \Lambda_{\frac{m(m+1)}{2}}^m \\ &= 1 \Sigma \lambda_1 + 2 \Sigma \lambda_2 + \dots + m \Sigma \lambda_m \\ &= 2^{m-1} (1 + 2 + 3 + \dots + m) = \frac{m(m+1)}{2} 2^{m-1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{i=0}^{\frac{m(m+1)}{2}} i \Lambda_i^m = 2^{m-1} \frac{m(m+1)}{2}.$$

Quatrième proposition. — On vient de voir, dans le cours de la précédente démonstration, que le nombre des lignes du Tableau qui y a été formé est 2^m . D'où

$$\sum_{i=0}^{\frac{m(m+1)}{2}} \Lambda_i^m = 2^m.$$

Cinquième proposition. — Si l'on a $\sum_{i=1}^{i=m} i \lambda_i = N$ et

(411)

qu'on remplace λ_1 par $1 - \lambda_1$, valeur aussi admissible pour λ_1 dans le système total des valeurs que peut prendre $\Sigma i \lambda_i$, à toute valeur N paire correspondra par cette substitution une valeur impaire N', et réciproquement. On a donc

$$\Sigma (-1)^i A_i^m = 0;$$

le nombre des valeurs paires obtenues est égal au nombre des valeurs impaires.

Sixième proposition. — Supposons que

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + m\lambda_m$$

donne une valeur paire $4n$, et soit $\lambda_2 + \lambda'_2 = 1$, alors $\lambda_1 + 2\lambda'_2 + \dots + m\lambda_m$ donnera la valeur $n' = 4n + 2$ ou $n' = 4n - 2$, suivant que λ_2 est nul ou égal à 1. Cette simple remarque montre que le nombre des valeurs pairement paires de $\Sigma i \lambda_i$ est égal au nombre de ses valeurs impairement paires. Donc

$$A_0^m - A_2^m + A_4^m - \dots = 0.$$

De même le nombre de ses valeurs de la forme $4n + 1$ est égal au nombre de ses valeurs de la forme $4n + 3$, ou bien

$$A_1^m - A_3^m + A_5^m - \dots = 0.$$

Septième proposition. — Je remarque que, en ajoutant ± 3 aux nombres $6m$, $6m \pm 1$, $6m \pm 2$, $6m \pm 3$, on obtient des nombres de la forme $6m \pm 3$, $6m \mp 2$, $6m \mp 1$, $6m$.

A une valeur de $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + m\lambda_m$ donnant un nombre de l'une des formes $6m$ ou $6m \pm 1$ correspond, pour $\lambda_3 + \lambda'_3 = 1$, un nombre de l'une des formes $6m \pm 3$ et $6m \pm 2$, et réciproquement. Donc

$$\Sigma A_i^m = \Sigma A_j^m,$$

si i parcourt tous les nombres de la forme $6m$ ou bien

$6m \pm 1$, j parcourant tous les nombres de la forme $6m \pm 3$ ou bien $6m \pm 2$.

Huitième proposition. — Celle-ci est la plus importante de toutes.

On a

$$(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^m) \\ = A_0^m + A_1^m x + A_2^m x^2 + \dots + A_{\frac{m(m+1)}{2}}^m x^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Cette identité est évidente.

En changeant x en $\frac{1}{x}$ et comparant les résultats, en faisant $x = -1$ ou $x = \sqrt{-1}$ ou $x = 1$, ou en prenant la dérivée des deux membres, on obtient aisément tous les résultats qui précèdent.

Neuvième proposition. — Je pose

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^m);$$

d'où

$$\log f(x) = \log(1+x) + \log(1+x^2) + \dots + \log(1+x^m),$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \dots + \frac{mx^{m-1}}{1+x^m}.$$

Or on a

$$\frac{p x^{p-1}}{1+x^p} = p x^{p-1} (1 - x^p + x^{2p} - x^{3p} + \dots),$$

ou

$$\frac{p x^{p-1}}{1+x^p} = p x^{p-1} - p x^{2p-1} + p x^{3p-1} - p x^{4p-1} + \dots$$

Quand le terme en x^{i-1} peut-il provenir du développement de $\frac{p x^{p-1}}{1+x^p}$? Il faudra qu'on ait

$$kp - 1 = i - 1 \quad \text{ou} \quad i = kp,$$

c'est-à-dire que p soit un diviseur de i , et alors x^{kp-1} est affecté du coefficient $(-1)^k p$.

Où a donc

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \sum B_{i-1}^m x^{i-1},$$

en posant

$$B_{i-1}^m = \sum (-1)^p p,$$

la sommation portant sur les nombres p moindres que m ou au plus égaux à m et qui sont des diviseurs de i .

Remarquons que, si le nombre des facteurs m croit indéfiniment, p désignera un facteur quelconque de i , ainsi que $\frac{i}{p}$, et que, alors, on a

$$\lim B_{i-1}^m = i \sum \frac{(-1)^{\delta}}{\delta},$$

δ parcourant tous les diviseurs de i . Or, en chassant le dénominateur $f(x)$ et égalant les coefficients des termes en x^{i-1} , on a

$$i A_i^m = A_0^m B_{i-1}^m + A_1^m B_{i-2}^m + A_2^m B_{i-3}^m + \dots + A_{i-1}^m B_0$$

et

$$i \lim A_i^m = \sum_{k=0}^{k=i-1} \lim A_k^m B_{i-k-1}^m \quad (\text{pour } m = \infty);$$

et, en posant $\lim A_i^m = A_i$, $\lim B_i^m = i B_i$, on aurait

$$A_i + \sum_{k=0}^{k=i-1} A_k B_{i-k-1} = 0.$$

Cette formule de récurrence fait connaître les A en fonction des B supposés connus ; et ces B représentent l'excès de la somme des inverses des diviseurs pairs de i sur l'excès de la somme des inverses des diviseurs impairs de i .

Dixième proposition. — Autre série récurrente. On a

$$\frac{1}{1+x^p} = 1 - x^p + x^{2p} - x^{3p} + \dots;$$

(414)

ainsi, en conservant la signification donnée plus haut à $f(x)$,

$$\frac{1}{f(x)} = (1 - x + x^2 - x^3 \dots)(1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots) \\ \times (1 - x^3 + x^6 - x^9 \dots) \dots (1 - x^m + x^{2m} \dots),$$

et, en posant

$$\frac{1}{f(x)} = \sum C_t^m x^t,$$

on aura

$$C_t^m = \sum (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ étant des entiers positifs pris de toutes les façons, tels qu'on ait

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + m\lambda_m = i.$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$ est le nombre des parties égales ou inégales, mais non supérieures à m dont la somme fait i , et C_t^m est l'excès du nombre des décompositions en un nombre pair de parties sur le nombre des décompositions en un nombre impair de parties.

On aura, en chassant le dénominateur,

$$C_0^m = 1, \quad C_1^m A_0^m + C_0^m A_1^m = 0, \quad \dots$$

et

$$C_t^m A_0^m + C_{t-1}^m A_1^m + \dots + C_0^m A_t^m = 0.$$

Exemple I. — On a

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1-x}{1-x^4} \\ = (1-x)(1+x^4)(1-x^8) \dots \\ = 1 - x + x^4 - x^8 + x^8 - x^8 + \dots,$$

et l'on déduit de là : le nombre des partitions paires (telles que le nombre des parties soit pair) du second ordre d'un nombre de la forme $4n+2$ ou $4n+3$ est égal à celui de ses partitions impaires.

(415)

Mais, si le nombre est de la forme $4n$ ou $4n+1$, l'un de ces nombres de partitions surpasse l'autre d'une unité.

Exemple II. — On a

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{(1+x)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{3}x}{1-x+x^2}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^2} &= \left(-\frac{1}{1+x} \right)' \\ &= (-1+x-x^2+\dots)' = 1-2x+3x^2-4x^3+\dots, \\ \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{(1+x)^2} &= \sum (-1)^n (n+1)x^n \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum x^n \left[(-1)^n \frac{n+1}{2} + (-1)^{n-1} \frac{n}{2} \right]. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} &(-1)^n \frac{n+1}{2} + (-1)^{n-1} \frac{n}{2} \\ &= (-1)^n \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \right) = (-1)^n \frac{1}{2}, \\ &\frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} = \sum \frac{(-1)^p}{2} x^{2p}, \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x+x^2} &= \frac{1+x}{1+x^3} = (1+x) \sum (-1)^q x^{3q} \\ &= \sum (-1)^q x^{3q} + \sum (-1)^q x^{3q+1} \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{-\frac{1}{3}x}{1-x+x^2} = \sum \frac{(-1)^{q+1}}{3} x^{3q+1} + \sum \frac{(-1)^{q+1}}{3} x^{3q+2}.$$

Cela posé, en appelant Δ l'excès du nombre des partitions paires sur le nombre des partitions impaires, on

aura le Tableau suivant :

$$\begin{aligned}
 n = 6m \dots \dots \Delta &= (-1)^n \frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} = \frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}, \\
 n = 6m + 1 \dots \Delta &= -\frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}+1}}{3} \quad (ex. : n = 7, \quad \Delta = -2), \\
 n = 6m + 2 \dots \Delta &= \frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{n-2}{3}+1}}{3}, \\
 n = 6m + 3 \dots \Delta &= -\frac{n+3}{6}, \\
 n = 6m + 4 \dots \Delta &= \frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}+1}}{3}, \\
 n = 6m + 5 \dots \Delta &= -\frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n-2}{3}+1}}{3}.
 \end{aligned}$$

Remarque I. — On a identiquement

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)} &= \frac{1}{(1+a)\dots(1+a^{n-1})} - \frac{a^n}{(1+a)\dots(1+a^n)}, \\
 \frac{1}{(1+a)\dots(1+a^{n-1})} &= \frac{1}{(1+a)\dots(1+a^{n-2})} - \frac{a^{n-1}}{(1+a)\dots(1+a^{n-1})}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{1}{1+a} &= 1 - \frac{a}{1+a},
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1+a)\dots(1+a^n)} &= 1 - \frac{a^n}{(1+a)\dots(1+a^n)} \\
 &\quad - \frac{a^{n-1}}{(1+a)\dots(1+a^{n-1})} - \dots - \frac{a}{1+a}.
 \end{aligned}$$

Donc, en appelant C_i^n l'excès du nombre de manières dont on peut décomposer i en une somme d'un nombre pair de parties entières, égales ou inégales non supérieures à n , sur le nombre des manières dont on peut le décomposer en une somme d'un nombre impair de parties entières, égales ou inégales non supérieures à n , on

aura la formule suivante, pour $i > n$,

$$C_i^n + C_{i-n}^n + C_{i-(n-1)}^{n-1} + C_{i-(n-2)}^{n-2} + \dots + C_{i-1}^1 = 0,$$

et, pour $i < n$, il faut supprimer les termes dont les indices sont négatifs.

Remarque II. — Considérons les m nombres 1, 2, 3, ..., m ; on peut les combiner n à n d'un nombre de façons égal à

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}.$$

Soit $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \delta = i$ une de ces combinaisons, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$ désignant n nombres pris parmi les n premiers nombres entiers. De même, je combine par addition les nombres de chaque combinaison. Soit A_i le nombre de fois que le nombre i se trouve répété. Le signe Σ portant alors sur tous les nombres analogues à i , on aura

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} = \Sigma A_i.$$

Donnons à n les valeurs 0, 1, 2, ..., m , et ajoutons les égalités semblables à la précédente, nous aurons, en nous rappelant que la somme des coefficients du binôme est égale à 2^m , et en désignant par B_i le nombre des façons de décomposer i en une somme de parties entières inégales non supérieures à m ,

$$2^m = \Sigma B_i.$$
