

ERNEST LEBON

## **Construction nouvelle des points d'intersection d'une droite et d'une conique**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 4  
(1885), p. 338-342

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1885\\_3\\_4\\_\\_338\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__338_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

## CONSTRUCTION NOUVELLE DES POINTS D'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE CONIQUE <sup>(1)</sup>;

PAR M. ERNEST LEBON.

---

1. Soit un cône de révolution à axe vertical, de sommet  $f, f'$  (fig. 1), dont la trace horizontale a pour diamètre la droite de front  $ac$ . Coupons ce cône selon une ellipse par le plan de bout  $aa'b'$ . On sait que la projection horizontale de la section est une ellipse dont  $ab$  est le grand axe et  $f$  un foyer.

Soit une droite  $mn, a'b'$  située dans le plan  $aa'b'$ . D'après la solution connue pour trouver les points d'intersection d'une droite et d'un cône, il faut obtenir la trace horizontale du plan auxiliaire déterminé par la droite et le sommet du cône. Le point  $a_1$ , où  $mn$  coupe  $a'a$ , est un point de cette trace. On en construit un second  $c_1$ , en menant la droite passant par le sommet  $f, f'$  et par le point  $b', b_1$  de  $mn, a'b'$ . La trace horizontale  $a_1c_1$  du plan auxiliaire coupe celle du cône en  $i_1$  et en  $j_1$  : les droites  $fi_1$  et  $fj_1$  rencontrent  $mn$  aux points  $i$  et  $j$ , projections horizontales des points d'intersection de la droite et du cône donnés.

Remarquons que les points  $i$  et  $j$  appartiennent à la droite

---

(1) Exposée à la *Société mathématique de France* (séance du 21 janvier 1885).





Pour démontrer que le point  $i$  appartient à l'ellipse donnée, nous menons : par le point  $i$  la parallèle  $ie$  à  $a_1c_1$ , coupant  $fc_1$  en  $e$ , et la parallèle  $ig$  à  $ab_1$ , coupant  $aa_1$  en  $g$ ; par le point  $b_1$  la parallèle  $b_1h$  à  $ab$ , coupant  $aa_1$  en  $h$ .

Les parallèles  $ie$  à  $a_1c_1$ ,  $ig$  à  $b_1h$ , dans les triangles  $a_1b_1c_1$ ,  $a_1b_1h$ , permettent d'écrire

$$\frac{a_1b_1}{a_1i} = \frac{c_1b_1}{c_1e}, \quad \frac{a_1b_1}{a_1i} = \frac{b_1h}{ig};$$

d'où l'on tire, en remarquant que  $b_1h$  égale  $ab$ ,

$$(1) \quad \frac{ab}{ig} = \frac{c_1b_1}{c_1e}.$$

On a de même, dans les triangles  $cf c_1$ ,  $i_1f c_1$ ,

$$\frac{c_1b_1}{c_1f} = \frac{cb}{cf}, \quad \frac{u_1}{fu_1} = \frac{c_1e}{c_1f},$$

et, par suite,

$$(2) \quad \frac{c_1b_1}{c_1e} = \frac{cb}{u_1}.$$

En appelant  $2a$  le grand axe et  $2c$  la distance des foyers, les égalités (1) et (2) donnent

$$(3) \quad \frac{u_1}{ig} = \frac{c}{a}.$$

Maintenant prolongeons  $gi$  jusqu'à sa rencontre en  $h$  avec la directrice  $dk$ . Appelant  $\varphi$  et  $\delta$  les distances  $if$  et  $ik$  de  $i$  à  $f$  et à  $dk$ , et remarquant que

$$fu_1 = a + c, \quad gh = ad = \frac{a}{c}(a + c),$$

nous avons

$$u_1 = a + c - \varphi, \quad ig = \frac{a}{c}(a + c) - \delta.$$

d'où l'on tire, en vertu de l'égalité (3) et après les ré-

ductions,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{c}{a}.$$

Cette égalité montre que le point  $i$  appartient à l'ellipse considérée.

Pour l'*hyperbole*, la démonstration est analogue à la précédente.

Pour la *parabole*, définie par son sommet  $a$  et son foyer  $f$  (*fig. 2*),  $dk$  étant la directrice, on mène la perpendiculaire  $ig$  sur  $aa_1$ , et l'on a, d'après la similitude des triangles  $iga_1$  et  $fcc_1$ , puis  $ii_1a_1$  et  $fi_1c_1$ ,

$$\frac{ig}{ia_1} = \frac{fc}{fc_1}, \quad \frac{ii_1}{ia_1} = \frac{fi_1}{fc_1},$$

d'où l'on tire  $ii_1 = ig$ , et par suite  $\varphi = \delta$ . Donc le point  $i$  appartient à la parabole considérée.

Le cas de la parabole mérite surtout d'être remarqué pour la simplicité de la construction et de la démonstration.