

E. CESÀRO

Sur la série harmonique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 295-296

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__295_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SÉRIE HARMONIQUE ;

PAR M. E. CESARO.

1. Désignons par H_n la somme des n premiers termes de la série harmonique. Si l'on pose

$$u_{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{n^5} + \frac{1}{7} \frac{1}{n^7} + \dots,$$

on a, d'après une formule connue,

$$l \frac{n+1}{n-1} = \frac{2}{n} + 2u_{n-1}.$$

Si, dans cette formule, on change n en $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2, on obtient, par addition,

$$l \frac{n(n+1)}{2} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) + 2(u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1})$$

ou bien

$$l \frac{n(n+1)}{2} = 2H_n - 2 + 2S_{n-1};$$

d'où

$$(1) \quad H_n = l \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + 1 - S_{n-1}.$$

2. Pour calculer S_{n-1} , étudions la série $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}$. On a

$$u_{n-1} < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7} + \dots \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} \right).$$

On obtient, par addition,

$$S_{n-1} < \frac{1}{12} - \frac{1}{6n(n+1)}.$$

(296)

Donc S_{n-1} tend vers une limite S , inférieure à $\frac{1}{12}$. Les termes étant positifs, on a

$$(2) \quad S_{n-1} < S.$$

D'autre part, on trouve de la même façon

$$S - S_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \dots < \frac{1}{6n(n-1)};$$

d'où

$$(3) \quad S_{n-1} > S - \frac{1}{6n(n-1)}.$$

Des inégalités (2) et (3), il résulte qu'on peut poser

$$S_{n-1} = S - \frac{\theta}{6n(n-1)},$$

θ étant compris entre 0 et 1.

3. Si, dans (1), on remplace S_{n-1} par sa valeur, on obtient

$$H_n = 1 + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} + 1 - S - \frac{\theta}{6n(n-1)}$$

ou bien

$$(4) \quad H_n = C - 1 + \sqrt{n(n-1)} - \frac{\theta}{6n(n-1)}.$$

C est une constante. Cette constante, qui porte le nom de *constante d'Euler*, est égale à 0,577215664....

Remarque. — La formule (4) donne H_n avec une erreur moindre que $\frac{1}{6n^2}$. On trouve, par exemple,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1000000} = 14,39.$$