

CH. BIEHLER

**Sur la construction des courbes dont
l'équation est donnée en coordonnées
polaires (suite)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 223-235

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__223_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES

[SUITE (1)];

PAR M. CH. BIEHLER. •

II.

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

1. Nous supposons, comme précédemment, que l'équation de la courbe soit donnée sous la forme

$$(1) \quad \rho^m \varphi_m(\omega) + \rho^{m-1} \varphi_{m-1}(\omega) + \dots + \rho \varphi_1(\omega) + \varphi(\omega) = 0.$$

Soit α une racine simple de l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$, c'est-à-dire soit $\varphi_m(\alpha) = 0$ et $\varphi'_m(\alpha) \neq 0$.

Nous supposons, pour commencer, que $\varphi_{m-1}(\alpha)$ soit aussi différent de zéro.

Lorsque ω s'approche de α , une seule racine de l'équation (1) augmente indéfiniment; toutes les autres tendent vers des limites finies; il est aisé de trouver le signe de cette racine.

On a, en effet, en désignant par $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ les m racines de l'équation en ρ ,

$$(2) \quad \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m = - \frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)};$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. IV, p. 153.

et l'on voit que le signe de la racine qui augmente indéfiniment est donné par le signe du second membre, lorsque ω est suffisamment voisin de α .

Nous poserons $\omega = \alpha + \varepsilon$, comme nous l'avons déjà fait, et nous ferons tendre ε vers zéro.

La quantité $-\frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)}$ prend alors la forme

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)} = \frac{[\varphi_{m-1}(\alpha) - \varepsilon \varphi'_{m-1}(\alpha) + \dots]}{\varepsilon \varphi'_m(\alpha) - \frac{\varepsilon^2}{1,2} \varphi''_m(\alpha) - \dots},$$

et, par suite, elle a le signe de

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varepsilon \varphi'_m(\alpha)}.$$

Or l'asymptote correspondant à cette racine, nécessairement réelle, qui augmente indéfiniment, a pour équation, comme l'on sait,

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = l,$$

l étant la limite de $\rho \sin(\omega - \alpha)$ tirée de l'équation de la courbe, lorsque ω tend vers α .

Cette limite nous est fournie immédiatement par l'équation (2). Si ρ_1 est la racine qui augmente indéfiniment, et S_1 la somme de toutes les autres racines, l'équation (2) prend la forme

$$\rho_1 + S_1 = -\frac{\varphi_{m-1}(\alpha) + \varepsilon \varphi'_{m-1}(\alpha) + \dots}{\varepsilon \varphi'_m(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{1,2} \varphi''_m(\alpha) + \dots}$$

et, par suite,

$$\rho_1 \sin \varepsilon + S_1 \sin \varepsilon = -\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \frac{[\varphi_{m-1}(\alpha) + \dots]}{\varphi'_m(\alpha)};$$

on en déduit

$$\lim \text{ de } \rho_1 \sin \varepsilon = -\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)}.$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = - \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)}.$$

2. Pour savoir de quel côté de l'asymptote se trouve la courbe, il faut connaître le signe de la différence

$$\lambda = \rho_1 \sin \varepsilon - l,$$

pour les valeurs de ε voisines de zéro. Cette différence a pour expression

$$\lambda = - \sin \varepsilon \frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi'_m(\omega)} + \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)} - S_1 \sin \varepsilon$$

ou bien

$$\lambda = - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varphi_{m-1}(\alpha) + \varepsilon \varphi'_{m-1}(\alpha) + \dots}{\varphi'_m(\alpha) + \frac{\varepsilon}{1.2} \varphi''_m(\alpha) + \dots} + \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)} - S_1 \sin \varepsilon;$$

si l'on observe que $\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ est de la forme

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{1.2.3} + \frac{\varepsilon^4 \times \theta}{1.2.3.4.5},$$

θ étant < 1 , on voit que λ a le signe de

$$\left[\frac{\frac{1}{1.2} \varphi''_m(\alpha) \varphi_{m-1}(\alpha) - \varphi'_m(\alpha) \varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi'^2_m(\alpha)} - S_1 \right] \varepsilon.$$

Or S_1 , étant la somme des racines $\rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_m$, est une quantité aussi voisine qu'on veut de $-\frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi_{m-1}(\alpha)}$ qui représente la somme des racines de l'équation

$$\rho^{m-1} \varphi_{m-1}(\omega) + \rho^{m-2} \varphi_{m-2}(\omega) + \dots + \varphi(\omega) = 0$$

pour $\omega = \alpha$.

On voit donc, en définitive, que λ a le signe de

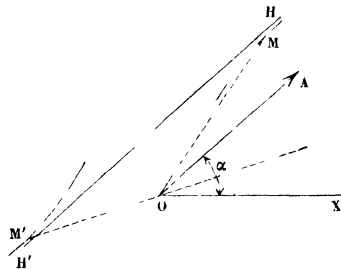
$$\left[\frac{\frac{1}{1.2} \varphi''_m(\alpha) \varphi_{m-1}(\alpha) - \varphi'_m(\alpha) \varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi'^2_m(\alpha)} + \frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi_{m-1}(\alpha)} \right] \varepsilon.$$

Soient OA le rayon polaire mené dans la direction α , HH' l'asymptote; λ représente la distance du point M situé sur le rayon vecteur $\alpha + \varepsilon$, à la droite HH'.

Si λ est négatif, le point M est au-dessous de HH'; si λ est positif, le point M est au-dessus de cette droite.

Le rayon OM est mené dans la direction $\alpha + \varepsilon$, ε étant positif; et OM', dans la direction $\alpha + \varepsilon$, ε étant supposé négatif. On voit que, quand ε change de signe, ρ , change

Fig. 1.



de signe, ainsi que λ . On obtient une disposition des branches de la courbe autour de l'asymptote analogue à celle de la *fig. 1*; cette figure a été construite dans l'hypothèse où le coefficient de ε dans λ est négatif.

3. Supposons actuellement que le coefficient de ε dans λ soit nul; dans ce cas, λ sera de la forme

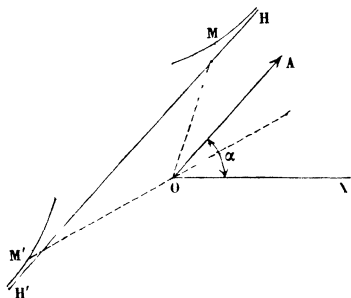
$$\lambda = \lambda_0 \varepsilon^2 + \lambda' \varepsilon^3,$$

λ_0 étant une quantité indépendante de ε et λ' une fonction de ε .

On voit que, pour des valeurs suffisamment petites de ε , λ a constamment le signe de λ_0 , quel que soit le signe de ε ; par suite, la courbe se trouve tout entière d'un côté de l'asymptote, et le point correspondant à l'infini est un point d'inflexion (*fig. 2*).

La figure a été construite dans l'hypothèse de $\lambda_0 > 0$.

Fig. 2.



Le point d'inflexion est donc caractérisé par la propriété suivante :

$$\frac{\frac{1}{2} \varphi_m''(\alpha) \varphi_{m-1}(\alpha) - \varphi_m'(\alpha) \varphi_{m-1}'(\alpha)}{\varphi_m'^2(\alpha)} + \frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi_{m-1}(\alpha)} = 0.$$

4. Supposons actuellement

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi_{m-1}(\alpha) = 0.$$

Dans ce cas, deux racines de l'équation en ρ augmentent indéfiniment; soient ρ_1 et ρ_2 ces deux racines, nous avons les formules

$$(a) \quad \rho_1 + \rho_2 = A + A'\varepsilon,$$

$$(b) \quad \rho_1 \rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon},$$

A et B étant des quantités indépendantes de ε , dont il est aisé de trouver les valeurs; A' et B' étant des fonctions de ε qu'il est inutile de déterminer, mais dont on trouverait aussi facilement les expressions. Des formules (a) et (b), on tire

$$(c) \quad (\rho_1 - \rho_2)^2 = (A + A'\varepsilon)^2 - 4 \left(\frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon} \right).$$

Le second membre a le signe de $-\frac{4B}{\varepsilon}$, et, par suite, ρ_1 et ρ_2 ne peuvent être réels que si

$$-\frac{4B}{\varepsilon} > 0,$$

c'est-à-dire si ε est de signe contraire à B.

Les formules (a) et (b) nous montrent que la somme

$$\rho_1 \sin \varepsilon + \rho_2 \sin \varepsilon$$

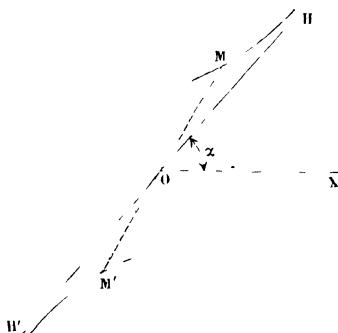
et le produit

$$\rho_1 \sin \varepsilon \times \rho_2 \sin \varepsilon$$

des quantités $\rho_1 \sin \varepsilon$, $\rho_2 \sin \varepsilon$ ont pour limites zéro; chacune de ces quantités a donc pour limite zéro. L'asymptote correspondant aux branches de courbe engendrées par ρ_1 et ρ_2 est donc confondue avec le rayon polaire mené dans la direction α .

Le signe de B nous donne la disposition de la courbe

Fig. 3.



autour de son asymptote. La construction de la *fig. 3* suppose B négatif.

La valeur de B est $\frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)}$, quantité différente de zéro et parfaitement déterminée dans l'hypothèse où nous nous sommes placés.

3. Nous n'examinerons pas en ce moment le cas où l'on aurait simplement

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire où l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$ aurait une racine double; mais nous y ajouterons la condition

$$\varphi_{m-1}(\alpha) = 0,$$

nous réservant de discuter le cas précédent quand il s'agira de la construction des branches paraboliques.

Nous aurons, dans ce cas, des formules de la forme

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon}, \\ \rho_1 \rho_2 &= \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

pour exprimer les deux racines qui augmentent indéfiniment. Les quantités A, B et le terme indépendant de ε dans A' et B' sont aisés à calculer.

Ces formules nous donnent

$$\begin{aligned} \rho_1 \sin \varepsilon + \rho_2 \sin \varepsilon &= \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} (A + A'\varepsilon), \\ \rho_1 \sin \varepsilon \times \rho_2 \sin \varepsilon &= \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} (B + B'\varepsilon). \end{aligned}$$

Lorsque ε tend vers zéro, les quantités $\rho_1 \sin \varepsilon$, $\rho_2 \sin \varepsilon$ tendent vers des limites l_1 , l_2 , telles que l'on ait

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= A, \\ l_1 l_2 &= B; \end{aligned}$$

l_1 et l_2 sont donc les racines de l'équation du second degré

$$l^2 - A l + B = 0.$$

On voit aisément que

$$A = -\frac{\varphi'_{m-1}(\alpha)}{2 \varphi'_m(\alpha)}, \quad B = \frac{\varphi'_{m-2}(\alpha)}{2 \varphi'_m(\alpha)},$$

de telle sorte que l'équation du second degré qui a pour racines l_1 et l_2 est la suivante :

$$\frac{1}{2} \varphi_m''(\alpha) l^2 + \varphi_{m-1}'(\alpha) l + \varphi_{m-2}(\alpha) = 0.$$

Il nous faut maintenant chercher la disposition de la courbe autour des deux asymptotes parallèles

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = l_1, \quad \rho \sin(\omega - \alpha) = l_2.$$

Désignons par λ_1 et λ_2 les fonctions $\rho_1 \sin \varepsilon$, $\rho_2 \sin \varepsilon$; on aura

$$(a') \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} (A + A' \varepsilon),$$

$$(b') \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} (B - B' \varepsilon);$$

il faut calculer les différences

$$\lambda_1 - l_1, \quad \lambda_2 - l_2.$$

Soient $\lambda' = \lambda_1 - l_1$, $\lambda'' = \lambda_2 - l_2$; on aura

$$\lambda' + \lambda'' = \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} (A - A' \varepsilon) - A;$$

d'autre part, les égalités (a) et (b) nous donnent

$$(c') \quad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} [(A + A' \varepsilon)^2 - 4(B - B' \varepsilon)],$$

et, comme on a

$$(l_1 - l_2)^2 = A^2 - 4B,$$

il viendra

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - (l_1 - l_2)^2 \\ &= (A^2 - 4B) \left(\frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} - 1 \right) + \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} (2AA' - 4B' + A'^2 \varepsilon). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$2AA' - 4B' = 2C + C' \varepsilon,$$

C étant indépendant de ε , l'égalité précédente prendra la forme

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - (l_1 - l_2)^2 = 2C\varepsilon - C'\varepsilon^2.$$

(231)

car

$$\frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} = 1 - \theta \varepsilon^2, \quad 0 < \theta;$$

par suite,

$$(\lambda' - \lambda'')(\lambda_1 - \lambda_2 + l_1 - l_2) = 2C\varepsilon + C''\varepsilon^2;$$

mais, comme l_1 et l_2 sont les limites respectives vers lesquelles tendent λ_1 et λ_2 , on peut écrire

$$\lambda_1 - \lambda_2 + l_1 - l_2 = 2(l_1 - l_2) + \tau,$$

τ ayant pour limite zéro quand ε tend vers zéro; on voit donc que

$$\lambda' - \lambda'' = \frac{2C\varepsilon + C''\varepsilon^2}{2(l_1 - l_2) + \tau},$$

$\lambda' - \lambda''$ a donc le signe de $\frac{C\varepsilon}{l_1 - l_2}$; on connaît donc les valeurs de $\lambda' + \lambda''$ et de $\lambda' - \lambda''$.

Si l'on fait

$$A' = A'_1 + A'_1 \varepsilon,$$

on aura

$$\lambda' + \lambda'' = A'_1 \varepsilon + A''_1 \varepsilon^2,$$

$$\lambda' - \lambda'' = \frac{C}{l_1 - l_2} \varepsilon + C'' \varepsilon^2;$$

par suite,

$$2\lambda' = \left(A'_1 + \frac{C}{l_1 - l_2} \right) \varepsilon + \dots,$$

$$2\lambda'' = \left(A'_1 - \frac{C}{l_1 - l_2} \right) \varepsilon + \dots;$$

λ' et λ'' ont donc les signes des quantités

$$A'_1 + \frac{C}{l_1 - l_2}, \quad A'_1 - \frac{C}{l_1 - l_2}.$$

Si l'on prend pour l_1 la racine

$$l_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

(232)

l_2 sera

$$l_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4B}}{2},$$

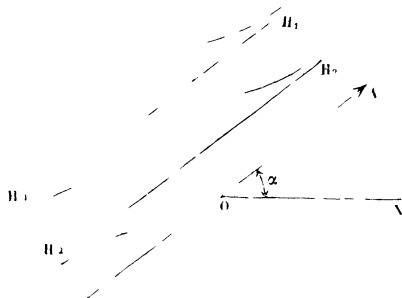
et

$$1\lambda' \text{ aura le signe de } \left(A'_1 + \frac{C}{\sqrt{A^2 - 4B}} \right) z,$$

$$2\lambda'' \text{ " " } \left(A'_1 - \frac{C}{\sqrt{A^2 - 4B}} \right) z.$$

Ces formules nous permettent de construire la courbe autour de ses asymptotes. Nous supposons $A^2 - 4B > 0$; cette condition est nécessaire pour que les racines φ_1, φ_2 soient réelles pour des valeurs de ω suffisamment voi-

Fig. 4



sines de α . La *fig. 4* a été construite dans l'hypothèse où les deux coefficients de z dans λ' et λ'' sont positifs.

Si $A^2 - 4B < 0$, le point à l'infini est isolé, φ_1 et φ_2 sont imaginaires.

6. Si $A^2 - 4B = 0$, les racines de l'équation du second degré en l sont égales, les deux asymptotes se confondent, et l'asymptote unique que l'on obtient a pour équation

$$\varphi \sin(\omega - \alpha) = \frac{\lambda}{2}$$

ou bien

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = -\frac{\varphi'_m(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)}.$$

Nous allons construire la courbe autour de cette asymptote

Dans ce cas,

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda' - \lambda''$$

et, par suite,

$$(\lambda' - \lambda'')^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} [(2AA' - 4B')\varepsilon + A'^2\varepsilon^2].$$

Cette équation se met aisément sous la forme

$$(\lambda' - \lambda'')^2 = 2C\varepsilon + C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon^3.$$

et l'on a

$$\lambda' - \lambda'' = A'_1\varepsilon - A''_1\varepsilon^2;$$

ces formules nous montrent que $C\varepsilon$ doit être positif, pour que $\lambda' - \lambda''$ et, par suite, λ' et λ'' soient réels; ε ne peut recevoir que des valeurs d'un signe déterminé; c'est le terme $\pm\sqrt{C\varepsilon}$ qui donne son signe à λ' et λ'' qui sont, par suite, de signe contraire. Comme l'on a $A^2 - 4B = 0$, on a forcément B positif; par suite, la formule

$$\rho_1\rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^2}$$

nous montre que ρ_1 et ρ_2 sont de même signe; on obtient donc une disposition de la courbe analogue à celle de la *fig.* 5. Le point à l'infini est de rebroussement de première espèce.

Mais, si $C = 0$, $(\lambda' - \lambda'')^2$ prendra la forme

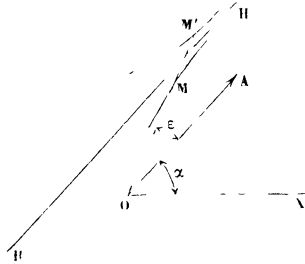
$$(\lambda' - \lambda'')^2 = C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon^3.$$

et, par suite, $\lambda' - \lambda''$ est aussi voisin que l'on veut de $\pm\varepsilon\sqrt{C_1}$.

Si $C_1 < 0$, le point de rebroussement à l'infini est

isolé; si $C_1 > 0$, des branches de courbes réelles accom-

Fig. 5.



pagneront l'asymptote, et l'on aura pour $\lambda' - \lambda''$ une expression de la forme

$$\lambda' - \lambda'' = \pm (\varepsilon \sqrt{C_1} + \varepsilon^2 C_1' + \dots);$$

d'autre part,

$$\lambda' + \lambda'' = A_1' \varepsilon + A_1'' \varepsilon^2;$$

par suite,

$$2\lambda' = (A_1' + \sqrt{C_1}) \varepsilon + \dots,$$

$$2\lambda'' = (A_1' - \sqrt{C_1}) \varepsilon + \dots;$$

en prenant le signe + devant le radical, ce qui est permis, λ' et λ'' ont le signe du coefficient de ε .

Si ces coefficients sont de même signe, on obtient la

Fig. 6.

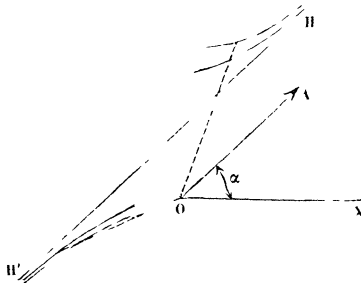


fig. 6; s'ils sont de signe contraire, on obtient la fig. 7.

La *fig. 6* a été construite dans l'hypothèse où les coefficients de ε dans λ' et dans λ'' sont positifs.

Mais, si $C_1 = 0$,

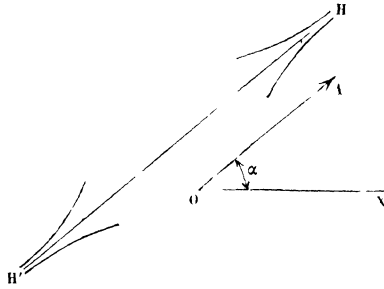
$$\lambda' - \lambda'' = \pm \sqrt{C_2} \varepsilon^2,$$

$$2\lambda' = A'_1 \varepsilon + \sqrt{C_2} \varepsilon^2 + A'_2 \varepsilon^2,$$

$$2\lambda'' = A'_1 \varepsilon - \sqrt{C_2} \varepsilon^2 + A'_2 \varepsilon^2;$$

ε ne peut plus recevoir que des valeurs du signe de C_2 (on peut substituer à C_2 la valeur que prend cette fonc-

Fig. 7.



tion pour $\varepsilon = 0$); on voit que λ' et λ'' seront de même signe; ce signe est celui de $A'_1 \varepsilon$. On obtient un rebroussement de seconde espèce. (*A suivre.*)