

L.-A. MONY

## **Quelques formules générales relatives aux intégrales définies et indéfinies**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 4 (1885), p. 176-183

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1885\\_3\\_4\\_\\_176\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__176_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

**QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES AUX INTÉGRALES  
DÉFINIES ET INDÉFINIES;**

PAR M. L.-A. MONY.

---

I. Considérons une fonction  $f(u, v, w, \dots)$  de  $n$  quantités  $u, v, w, \dots$  qui varient simultanément en

satisfaisant aux relations (1)

$$(1) \quad u = \lambda(z), \quad v = \varphi(z), \quad w = \psi(z), \quad \dots,$$

où  $z$  est une variable indépendante. Si l'on donne à  $z$  un accroissement  $dz$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ... ont pour différentielles  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$ , ..., et l'on a

$$df(u, v, w, \dots) = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv + \frac{df}{dw} dw + \dots$$

Si l'on intègre entre les limites  $z_1$  et  $z_2$  et si l'on nomme  $u_1, v_1, w_1, \dots$ , et  $u_2, v_2, w_2, \dots$ , les valeurs correspondantes de  $u, v, w, \dots$ , on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(u_2, v_2, w_2, \dots) - f(u_1, v_1, w_1, \dots) \\ = \int_{u_1}^{u_2} \frac{df}{du} du + \int_{v_1}^{v_2} \frac{df}{dv} dv + \int_{w_1}^{w_2} \frac{df}{dw} dw + \dots \end{array} \right.$$

en supposant que dans la fonction  $\frac{df}{du}$  on a remplacé  $v$ ,  $w$ , ... par leurs valeurs en fonction de  $u$  tirées des équations (1), que dans la fonction  $\frac{df}{dv}$  on a remplacé  $u$ ,  $w$ , ... par leurs valeurs en fonction de  $v$  tirées des équations (1), .... Mais la valeur d'une intégrale définie étant indépendante du nom donné à la variable qui se trouve sous le signe  $\int$ , on peut remplacer, dans chacune des fonctions  $\frac{df}{du}$ ,  $\frac{df}{dv}$ ,  $\frac{df}{dw}$ , ..., les variables  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ..., qui entrent alors isolément dans chacune d'elles, par une même variable  $x$ . On a ainsi une relation entre  $n$  intégrales définies, qui permet d'obtenir l'une d'elles, lorsque l'on connaît les  $n - 1$  autres. Les limites  $u_1, u_2$  de l'une des intégrales sont arbitraires, mais leur choix détermine celles des autres intégrales. La connaissance de  $n - 1$  de ces intégrales sous forme indéfinie permet d'obtenir la  $n^{\text{me}}$  sous la même forme;

on n'aura en effet qu'à remplacer  $u_2$  par  $x$  dans la formule (2), et cette formule donnera

$$\int_{u_1}^x \frac{df}{du} dx$$

à l'aide des autres intégrales.

Si les relations (1) sont

$$u = z, \quad v = \varphi(z), \quad w = \psi(z), \quad \dots,$$

ou simplement

$$(3) \quad r = \varphi(u), \quad w = \psi(u), \quad \dots,$$

ce qui revient à prendre  $u$  comme variable indépendante, la relation (2) devient (4), en désignant par  $\Phi$  la fonction inverse de  $\varphi$ ,  $\Psi$  la fonction inverse de  $\psi$ , ... :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(u_2, v_2, w_2, \dots) - f(u_1, v_1, w_1, \dots) \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{df}{du} [x, \varphi(x), \psi(x), \dots] dx \\ &+ \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} \frac{df}{dv} \{ \Phi(x), x, \psi[\Phi(x)], \dots \} dx \\ &+ \int_{\psi(u_1)}^{\psi(u_2)} \frac{df}{dw} \{ \Psi(x), \varphi[\Psi(x)], x, \dots \} dx + \dots \end{aligned} \right.$$

Cette formule (4) est notre formule fondamentale; en choisissant convenablement les fonctions  $f, \varphi, \psi, \dots$ , elle donne des théorèmes intéressants qui font l'objet de ce travail.

II. Considérons en particulier le cas où il n'entre que deux quantités  $u$  et  $v$  dans la fonction  $f$ .

Posons d'abord  $f(u, v) = u \times v$  avec  $v = \varphi(u)$ .

La formule (4) donne, en y remplaçant  $u_1$  par  $x_1$ ,  $u_2$  par  $x_2$ ,

$$(5) \quad x_2 \varphi(x_2) - x_1 \varphi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} \Phi(x) dx.$$

De la formule (5) on déduit ce théorème important :

**THÉORÈME.** — *Si l'on connaît l'intégrale définie d'une fonction  $\varphi(x)$  entre certaines limites  $x_1$  et  $x_2$ , on en déduit l'intégrale définie, entre les limites  $\varphi(x_1)$  et  $\varphi(x_2)$ , de la fonction inverse  $\Phi(x)$ ;*

Et aussi, en vertu d'une remarque faite plus haut, ce théorème encore plus utile :

**THÉORÈME.** — *Si l'on connaît l'intégrale indéfinie d'une fonction  $\Phi(x)$ , on en déduit immédiatement celle de la fonction inverse  $\varphi(x)$ .*

On peut donner de la formule (5) une démonstration géométrique.

Considérons la courbe représentée par l'équation  $y = \varphi(x)$  en coordonnées rectangulaires. Soient  $x_1, y_1$  et  $x_2, y_2$  les coordonnées des points  $M_1$  et  $M_2$  de la courbe,  $P_1$  et  $P_2$  les pieds de leurs ordonnées et  $Q_1$  et  $Q_2$  les pieds de leurs abscisses ; on a évidemment, si  $O$  est l'origine des coordonnées,

$$\begin{aligned} & \text{surface } M_2 P_2 O Q_2 - \text{surface } M_1 P_1 O Q_1 \\ &= \text{surface } M_1 P_1 P_2 M_2 + \text{surface } M_1 Q_1 Q_2 M_2 ; \end{aligned}$$

la relation (5) n'est que la traduction analytique de cette égalité.

Dans le cas particulier que nous examinons, la relation (2) prend la forme

$$(6) \quad u_2 v_2 - u_1 v_1 = \int_{u_1}^{u_2} v \, du + \int_{v_1}^{v_2} u \, dv ;$$

supposons que la relation qui unit  $u$  à  $v$  soit symétrique, on en tirera

$$u = \varphi(v), \quad v = \varphi(u) :$$

les fonctions  $\varphi$  et  $\Phi$  seront les mêmes ; nous aurons

alors une relation (6) entre deux intégrales définies ne différant que par leurs limites. On en déduit immédiatement la relation (7) entre des intégrales indéfinies; désignant par  $I(x)$  l'intégrale indéfinie  $\int \varphi(x) dx$ ,

$$(7) \quad I(x) - I[\varphi(x)] = x\varphi(x) + \text{const.}$$

Il n'est pas nécessaire pour obtenir des relations analogues à (6) et (7) que les fonctions  $\varphi$  et  $\Phi$  soient les mêmes, il suffit que, par des changements de variables, des intégrations par parties ou par tout autre procédé, on puisse ramener à une même forme  $\int \varphi(x) dx$  et  $\int \Phi(x) dx$ , ces intégrales ne différant après cette réduction que par les limites entre lesquelles elles sont prises.

III. Si l'on fait d'autres hypothèses sur la forme de la fonction  $f(u, r)$ , on obtiendra des formules de transformation analogues aux précédentes, et leur choix plus ou moins heureux donnera des résultats plus ou moins intéressants.

Posons d'abord  $f(u, v) = \frac{u}{v}$  avec  $v = \varphi(u)$ , la formule (4) donne, en y remplaçant  $u_1$  par  $x_1$  et  $u_2$  par  $x_2$ , la formule

$$(8) \quad \frac{x_2}{\varphi(x_2)} - \frac{x_1}{\varphi(x_1)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\varphi(x)} - \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} \frac{\Phi(x)}{x^2} dx;$$

et, pour les intégrales indéfinies, la formule

$$(9) \quad \frac{x}{\varphi(x)} - \frac{x_1}{\varphi(x_1)} = \int_{x_1}^x \frac{dx}{\varphi(x)} - \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x)} \frac{\Phi(x) dx}{x^2};$$

mais la formule (8) peut être écrite sous la forme

$$(10) \quad \frac{\Phi(x_2)}{r_2} - \frac{\Phi(x_1)}{r_1} = \int_{\Phi(x_1)}^{\Phi(x_2)} \frac{d\varphi}{\varphi(r)} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Phi(x)}{x^2} dx;$$

les deux intégrales  $\int \frac{dx}{\varphi(x)}$  et  $\int \frac{\Phi(x)}{x^2} dx$  se ramènent donc indifféremment l'une à l'autre.

Posons encore  $f(u, v) = \sqrt{u} \times \sqrt{v}$  avec  $v = \varphi(u)$ , on obtient une formule qui permet de ramener l'une à l'autre les deux intégrales  $\int \sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}} dx$  et  $\int \sqrt{\frac{\Phi(x)}{x}} dx$ .

Posons enfin  $f(u, v) = u \times L v$  avec  $v = \varphi(u)$ , on obtient une formule qui permet de ramener l'une à l'autre les deux intégrales  $\int L[\varphi(x)] dx$  et  $\int \frac{\Phi(x)}{x} dx$ .

On peut varier à l'infini les hypothèses sur la forme de la fonction  $f$ ; chacun de ces hypothèses donnera naissance à des formules analogues aux précédentes.

On peut aussi combiner entre eux ces divers procédés de transformation, et transformer ainsi une intégrale d'une infinité de manières.

On peut enfin considérer des fonctions  $f$  de plus de deux variables, on obtient des relations analogues aux précédentes où entrent plus de deux intégrales.

IV. Revenons à la formule (2) qui nous a servi de point de départ. Dans le cas particulier d'une fonction de deux variables  $f(u, v)$ , on a

$$(11) \quad \begin{cases} f(u_2, v_2) - f(u_1, v_1) \\ = \int_{u_1}^{u_2} \frac{df}{du}(u, v) du + \int_{v_1}^{v_2} \frac{df}{dv}(u, v) dv. \end{cases}$$

Supposons que la relation qui unit  $v$  à  $u$  soit  $v = u$ ; en remplaçant dans (11)  $u_2$  et  $v_2$  par  $x_2$ ,  $u_1$  et  $v_1$  par  $x_1$ , il vient

$$(12) \quad \begin{cases} f(x_2, x_2) - f(x_1, x_1) \\ = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{du}(x, x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dv}(x, x) dx. \end{cases}$$

Donc, si une fonction de la variable  $x$  peut être considérée comme la dérivée partielle par rapport à  $u$  d'une fonction connue  $f(u, v)$ , lorsqu'on fait dans cette dérivée partielle  $u = v = x$ , on obtiendra immédiatement l'intégrale indéfinie ou définie entre certaines limites de la différentielle formée par cette fonction multipliée par  $dx$ , si l'on connaît l'intégrale indéfinie ou l'intégrale définie entre les mêmes limites de la différentielle partielle de  $f(u, v)$  par rapport à  $v$  où l'on fait après la différentiation  $u = v = x$ .

Ce théorème donne un mode de transformation plus général que celui de l'intégration par parties, qu'il comprend d'ailleurs dans le cas particulier où

$$f(u, v) = \varphi(u) \times \psi(v).$$

Lorsqu'on aura à chercher l'expression d'une intégrale  $\int \varphi(x) dx$ , il faudra remplacer dans la fonction  $\varphi$  la lettre  $x$ , soit par  $u$ , soit par  $v$ , de telle façon que la fonction que l'on substituera ainsi à  $\varphi(x)$  puisse être considérée comme la dérivée partielle par rapport à  $u$  d'une fonction connue dont la différentielle partielle par rapport à  $v$ , où l'on fera  $u = v = x$ , sera facile à intégrer.

Les considérations qui précèdent s'étendent facilement à des fonctions de plus de deux variables

$$f(u, v, w, \dots).$$

On arrive à cette conclusion :

Pour intégrer une différentielle  $\varphi(x) dx$ , on peut y remplacer la lettre  $x$  convenablement par les lettres  $u, u, w, \dots$ , de telle sorte que cette différentielle soit, après cette substitution, la différentielle partielle par rapport à  $u$  d'une fonction connue dont les autres diffé-

rentielles partielles relatives à  $\nu, \omega, \dots$  soient, lorsqu'on y fait  $u = \nu = \omega = \dots = x$ , faciles à intégrer.

---