

CH. BIEHLER

**Sur la construction des courbes dont
l'équation est donnée en coordonnées
polaires (suite)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 153-159

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__153_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES

[SUITE (1)]:

PAR M. CH. BIEHLER.

6. Nous supposons d'abord que l'équation de la courbe soit donnée sous la forme

$$\rho = F(\omega) \quad \text{ou} \quad r = f(\omega),$$

en posant $\frac{1}{\rho} = u$,

$$F(\omega) = \frac{1}{f(\omega)}.$$

Soient $\omega = \alpha$, $u = a$ les coordonnées d'un point; nous allons chercher la forme de la courbe autour de ce point.

L'équation de la tangente au point $\omega = \alpha$, $u = a$ de la courbe $u = f(\omega)$ s'obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & \cos \omega & \sin \omega \\ f(\alpha) & \cos \alpha & \sin \alpha \\ f'(\alpha) & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix},$$

ou bien, en développant,

$$u = f(\alpha) \cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha) \sin(\omega - \alpha).$$

Le rayon vecteur de la courbe est donné par

$$u = f(\omega).$$

La différence entre les valeurs de u qui se rapportent à

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. III; 1884.

Ann. de Mathémat., 3^e série, t. IV. (Avril 1885)

la courbe et à la droite est donc donnée par l'expression

$$\Phi(\omega) = f(\omega) - f(\alpha) \cos(\omega - \alpha) - f'(\alpha) \sin(\omega - \alpha).$$

C'est le signe de la fonction $\Phi(\omega)$ pour des valeurs de ω voisines de α qui donne la forme de la courbe dans le voisinage du point de contact. Or $\Phi(\omega)$ s'annule pour $\omega = \alpha$; sa dérivée

$$\Phi'(\omega) = f'(\omega) + f(\alpha) \sin(\omega - \alpha) - f'(\alpha) \cos(\omega - \alpha)$$

s'annule également pour $\omega = \alpha$; mais la dérivée seconde

$$\Phi''(\omega) = f''(\omega) - f(\alpha) \cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha) \sin(\omega - \alpha)$$

devient égale à $f''(\alpha) + f'(\alpha)$ pour $\omega = \alpha$.

Supposons que $\Phi''(\alpha) = f''(\alpha) + f'(\alpha)$ soit une quantité différente de zéro, et, pour fixer les idées, supposons-la positive : on pourra trouver une quantité angulaire ε , telle qu'entre $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$ la fonction $\Phi''(\omega)$ ait le signe de $\Phi''(\alpha)$ et, par suite, soit positive; la dérivée $\Phi'(\omega)$ est donc croissante dans tout l'intervalle de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega = \alpha$, elle est négative quand ω varie de $\alpha - \varepsilon$ à α et positive de α à $\alpha + \varepsilon$; la fonction $\Phi(\omega)$ est donc décroissante entre $\alpha - \varepsilon$ et α et croissante entre α et $\alpha + \varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega = \alpha$, elle est positive de $\alpha - \varepsilon$ à α et de α à $\alpha + \varepsilon$. La courbe se trouve donc tout entière d'un même côté de sa tangente dans le voisinage du point de contact; et, dans l'hypothèse faite, le rayon vecteur de la tangente l'emporte sur celui de la courbe; par suite, la courbe est concave vers le pôle.

On arriverait à la conclusion inverse si l'on supposait

$$f''(\alpha) + f'(\alpha) < 0,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, la courbe serait convexe vers le pôle.

7. Supposons maintenant

$$f''(\alpha) + f(\alpha) = 0,$$

et calculons la valeur de $\Phi'''(\alpha)$.

Or

$$\Phi'''(\omega) = f'''(\omega) - f(\alpha) \sin(\omega - \alpha) + f'(\alpha) \cos(\omega - \alpha),$$

par suite,

$$\Phi'''(\alpha) = f'''(\alpha) + f'(\alpha).$$

Supposons cette quantité différente de zéro, positive par exemple. Dans ce cas, on pourra trouver une quantité angulaire ε , telle qu'entre $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$ la fonction $\Phi'''(\omega)$ conserve le même signe et, par suite, soit positive. $\Phi''(\omega)$ est, dans ce cas, croissante entre $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega = \alpha$, elle est négative entre $\alpha - \varepsilon$ et α et positive entre α et $\alpha + \varepsilon$; la fonction $\Phi'(\omega)$ est donc décroissante entre $\alpha - \varepsilon$ et α et croissante entre α et $\alpha + \varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega = \alpha$, elle est positive dans tout l'intervalle de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$; par suite, $\Phi(\omega)$ est croissante dans tout cet intervalle, et, comme elle s'annule pour $\omega = \alpha$, elle est négative entre $\alpha - \varepsilon$ et α et positive entre α et $\alpha + \varepsilon$. La courbe est donc convexe vers le pôle entre $\alpha - \varepsilon$ et α et concave entre α et $\alpha + \varepsilon$. Le point $\omega = \alpha$, $u = a$ est un point d'inflexion.

La discussion précédente fait donc voir que les points d'inflexion d'une courbe sont donnés par l'équation

$$f(\omega) + f''(\omega) = 0$$

ou

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 0.$$

Elle montre, de plus, que, si la première des dérivées de la fonction $\Phi(\omega)$ qui ne s'annule pas est d'ordre pair 2μ , la courbe est convexe vers le pôle autour du point

$\omega = \alpha$, $u = \alpha$, si $\Phi^{(2\mu)}(\alpha) < 0$, et concave si $\Phi^{(2\mu)}(\alpha) > 0$. Si la première des dérivées de la fonction $\Phi(\omega)$ qui ne s'annule pas pour $\omega = \alpha$ est d'ordre impair $2\mu + 1$, le point considéré est un point d'inflexion, et il sera toujours possible de préciser la forme de la courbe autour de ce point d'après le signe de $\Phi^{(2\mu+1)}(\alpha)$.

Nous avons supposé que l'équation de la courbe est donnée sous la forme

$$u = f(\omega).$$

Si l'équation de la courbe était $F(u, \omega) = 0$ non résolue par rapport à u , il est possible de déterminer, d'après ce qui précède, la forme de la courbe en un point $u = \alpha$, $\omega = \alpha$; car les quantités $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, ..., $f^{2\mu}(\alpha)$, $f^{2\mu+1}(\alpha)$ qui interviennent dans la discussion précédente peuvent être tirées de l'équation de la courbe; ce sont les quantités u' , u'' , ... qui sont fournies par les égalités

$$\begin{aligned} F'_{\omega} - u' F'_u &= 0, \\ F''_{\omega\omega} - 2u' F''_{\omega u} + u'^2 F''_{uu} + u'' F'_u &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Toutefois ce procédé n'est plus applicable quand $F'_u = 0$.

Supposons l'équation $F(u, \omega) = 0$ algébrique et de degré m en u , et proposons-nous de construire, dans le cas précédent, cette courbe autour du point $u = \alpha$, $\omega = \alpha$.

Posons, pour cela,

$$u = \alpha + V, \quad \omega = \alpha + \varepsilon,$$

L'équation de la courbe deviendra

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \varepsilon F'_{\omega}(\alpha, \alpha) - V F'_u(\alpha, \alpha) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{1.2} F''_{\omega\omega}(\alpha, \alpha) - \varepsilon V F''_{\omega u}(\alpha, \alpha) + \frac{V^2}{1.2} F''_{uu}(\alpha, \alpha) + \dots \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(2) \quad 0 = \Phi(x, \varepsilon) + V \Phi_1(x, \varepsilon) + \dots + V_m \Phi_m(x, \varepsilon)$$

Si $F'_u(a, x) = 0$ et $F'_\omega(a, x) \geq 0$, les deux fonctions $\Phi(a, \varepsilon)$, $\Phi_1(a, \varepsilon)$ sont divisibles par ε , et, par suite, quand ε tend vers zéro, deux des racines de l'équation (2) tendront vers zéro.

En désignant par V_1 et V_2 ces deux racines, par $V_3, \dots, V_m$ les autres, on a

$$\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} + \dots + \frac{1}{V_m} = -\frac{\Phi_1(x, \varepsilon)}{\Phi(x, \varepsilon)},$$

$$\frac{1}{V_1 V_2} + \dots - \frac{1}{V_{m-1} V_m} = \frac{\Phi_2(x, \varepsilon)}{\Phi(x, \varepsilon)},$$

ou bien

$$\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} = - \left[\frac{F''_{\omega u}(a, x)}{F'_\omega(a, x)} + \psi(x, \varepsilon) + S_1 \right],$$

$$\frac{1}{V_1 V_2} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{F''_{u^2}(a, x)}{F'_\omega(a, x)} + \psi(x, \varepsilon) + S_2 \right],$$

S_1 est la somme des quantités $\frac{1}{V_3} + \dots + \frac{1}{V_m}$, et S_2 la somme des produits deux à deux des mêmes quantités, $\psi(x, \varepsilon)$ et $\psi(x, \varepsilon)$ sont des fonctions qui renferment ε en facteur.

De ces formules on tire la suivante :

$$\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)^2 = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{4 F''_{u^2}(a, x)}{F'_\omega(a, x)} + \Theta(x, \varepsilon) \right],$$

$\Theta(x, \varepsilon)$ renfermant ε en facteur.

Les racines V_1 et V_2 ne sont donc réelles qu'autant que ε est de signe contraire à

$$\frac{F''_{u^2}(a, x)}{F'_\omega(a, x)};$$

par suite, si $F''_{u^2}(a, x)$ est différent de zéro, la courbe se trouve tout entière d'un même côté du rayon OA mené

sous l'angle α , et le signe de la fonction

$$\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_{\omega}(a, \alpha)}$$

indique de quel côté se trouve la courbe. La formule qui nous donne la somme $\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}$ nous montre que cette somme est finie; par suite, comme V_1 et V_2 tendent vers zéro, ils sont de signes contraires.

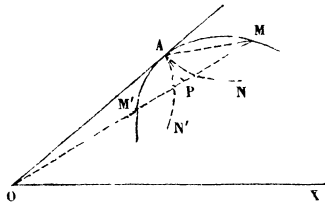
Si

$$\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_{\omega}(a, \alpha)} > 0,$$

la courbe a la forme représentée (fig. 9).

On obtient une branche MAM' tangente à OA et non

Fig. 9.



une branche analogue à NAN', car, dans le triangle PAM obtenu en prenant $OP = OA$, le rapport $\frac{AP}{PM}$ a pour limite zéro quand ε tend lui-même vers zéro.

Si $F'_{\omega}(a, \alpha)$ est nul en même temps que $F''_{u^2}(a, \alpha)$, le point $u = a$, $\omega = \alpha$ est un point double.

Dans ce cas, l'équation

$$F'_{\omega} + u' F'_u = 0$$

devient une identité pour $u = a$, $\omega = \alpha$; mais la suivante, à savoir

$$F''_{\omega^2} + 2u' F''_{\omega u} + u'^2 F''_{u^2} = 0,$$

donne, dans ce cas, les valeurs de u' au nombre de 2.

L'équation suivante

$$F''_{\omega^3} + 3 u' F''_{\omega^2 u} + 3 u'^2 F''_{\omega u^2} + u'^3 F''_{u^3} + 3 u'' (F''_{u\omega} + u' F''_{u^2}) = 0$$

donne la valeur de u'' correspondant à chaque valeur de u' .

La méthode indiquée pour traiter le cas où

$$F'_u(\alpha, \alpha) = 0$$

peut s'appliquer à la discussion générale. Mais nous ne l'exposerons pas ici, et nous allons passer à la construction de la courbe autour de ses points à l'infini.

(*A suivre.*)