

MAURICE D'OCAGNE

**Étude de deux systèmes simples
de coordonnées tangentielles dans
le plan : coordonnées parallèles et
coordonnées axiales**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 545-561

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__545_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES

(voir p. 516);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,

Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

COORDONNÉES AXIALES ⁽¹⁾.

VI. — FORMULES FONDAMENTALES.

38. *Définition.* — On se donne une droite Ox , *axe* du système, et sur cette droite, un point O , *pôle* du système. Une droite est déterminée par l'angle θ qu'elle fait avec Ox et la distance λ de son point d'intersection avec Ox au point O . Les coordonnées λ et θ portent, bien entendu, leur signe.

Toute relation entre λ et θ définit alors une courbe par ses tangentes ; elle est l'équation de cette courbe.

39. *Transformation des coordonnées.*

1° On change de pôle, en conservant le même axe. Dans ces conditions, θ reste le même ; si λ_1 est la nouvelle valeur de la coordonnée linéaire et si a est la distance, prise avec son signe, du nouveau pôle à l'ancien, on a

$$(1) \quad \lambda = \lambda_1 + a.$$

(¹) Un système tout à fait analogue a été étudié par M. H.-J. PURKISS : *Notes on pedal coordinates* (*The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, vol. III, p. 83 : 1866). CH. B.

A la suite d'une Communication orale que je fis sur ce sujet à la *Société mathématique*, un membre de la Société me dit que ce système avait été aussi proposé par M. l'abbé Aoust. M. O.

Ann. de Mathémat., 3^e série, t. III. (Decembre 1884.)

2° On change d'axe, en conservant le même pôle. Si ω est l'angle du nouvel axe avec l'ancien, on a

$$(2) \quad \theta = \theta_1 + \omega$$

et

$$\lambda \sin \theta = \lambda_1 \sin \theta_1;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\lambda_1 \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 + \omega)}.$$

3° On transporte l'axe parallèlement à lui-même, le pôle restant sur une perpendiculaire à la direction de cet axe. Alors, θ reste le même, et l'on a

$$(3) \quad \lambda = \lambda_1 - h \cot \theta,$$

h étant la distance du nouvel axe à l'ancien.

Toute transformation peut, par décomposition, se ramener aux trois précédentes.

40. *Passage aux coordonnées parallèles.* — Prenons pour origines des coordonnées parallèles deux points de l'axe Ox équidistants du pôle O et pour axes des u et des v les perpendiculaires élevées par ces points à la droite Ox . Nous aurons, en appelant δ la distance commune des nouvelles origines au point O ,

$$\tan \theta = \frac{v - u}{2\delta} = - \frac{u + v}{2\lambda}.$$

Pour passer des coordonnées axiales aux coordonnées parallèles, les formules seront donc

$$(4) \quad \begin{cases} \tan \theta = \frac{v - u}{2\delta}, \\ \lambda = \delta \frac{u + v}{u - v}. \end{cases}$$

Pour le passage inverse,

$$(4') \quad \begin{cases} u = (\delta - \lambda) \tan \theta, \\ v = -(\delta + \lambda) \tan \theta. \end{cases}$$

41. *Relation avec les coordonnées ordinaires.* — Étant donnée l'équation en x et y d'une courbe, on formera très simplement l'équation en λ et θ de cette courbe rapportée à l'ancien axe des x pris pour axe des λ et à l'ancienne origine prise pour pôle, en prenant l'équation de la tangente à la courbe en fonction de son coefficient angulaire m , et remplaçant dans cette équation y par zéro, x par λ et m par $\tan \theta$.

42. *Équations de courbes usuelles.* — Ces équations se déduisent des équations correspondantes en x et y par le procédé qui vient d'être indiqué; les deux premières sont très aisées à obtenir directement.

Point,

$$\lambda = a - b \cot \theta,$$

a et b étant les coordonnées rectangulaires de ce point.

Cercle,

$$(\lambda - a) \sin \theta + b \cos \theta - R = 0,$$

a et b étant les coordonnées rectangulaires du centre et R le rayon. Si le cercle est tangent à Ox , c'est-à-dire si $b = R$, l'équation peut s'écrire

$$\lambda = a + R \tan \frac{\theta}{2}.$$

Ellipse rapportée à son axe focal et à son centre,

$$\lambda^2 = a^2 + b^2 \cot^2 \theta,$$

a et b étant les demi-axes de la courbe.

Hyperbole,

$$\lambda^2 = a^2 - b^2 \cot^2 \theta.$$

Parabole rapportée à son axe et à son sommet,

$$\lambda + \frac{p}{2} \cot^2 \theta = 0,$$

p étant le paramètre de la courbe.

43. *Équation générale des coniques.* — Prenons l'équation générale des coniques en coordonnées parallèles

$$A u^2 + 2 B u v + C v^2 + 2 D u + 2 E v + F = 0,$$

et opérons la transformation indiquée au n° 40; il vient pour l'équation en λ et θ correspondante

$$\begin{aligned} & [(A + 2B + C)\lambda^2 \\ & + 2(C - A)\delta\lambda + (A - 2B + C)\delta^2] \tan^2\theta \\ & - 2[(D + E)\lambda - (D - E)\delta] \tan\theta + F = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} a &= A + 2B + C, & d &= -(D + E), \\ b &= (C - A)\delta, & e &= (D - E)\delta, \\ c &= (A - 2B + C)\delta^2, & f &= F. \end{aligned}$$

L'équation devient

$$(a\lambda^2 + 2b\lambda + c) \tan^2\theta + (2d\lambda + 2e) \tan\theta + f = 0.$$

Ainsi donc, étant donnée une conique, on obtient, pour son équation en λ et θ , une expression, égale à 0, qui contient un terme en $\tan^2\theta$ dont le coefficient est un trinôme du deuxième degré en λ , un terme en $\tan\theta$ dont le coefficient est un binôme du premier degré en λ , et un terme constant.

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une conique, car les six équations précédentes permettent, lorsqu'on se donne arbitrairement δ , de déterminer A, B, C, D, E, F , en fonction de a, b, c, d, e, f . On trouve

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\delta} + \frac{c}{2\delta^2} \right), & D &= \frac{1}{2} \left(\frac{e}{\delta} - d \right), \\ B &= \frac{1}{4} \left(a - \frac{c}{\delta^2} \right), & E &= -\frac{1}{2} \left(d + \frac{e}{\delta} \right), \\ C &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{\delta} + \frac{c}{2\delta^2} \right), & F &= f. \end{aligned}$$

Remarquons que, si $a = A + 2B + C = 0$, la courbe est une parabole.

Pour reconnaître la nature de la courbe, formons (n° 25) la quantité

$$\mu = (A + 2B + C)[AE^2 - 2BDE + CD^2 + F(B^2 - AC)];$$

on trouve

$$\mu = \frac{a}{64\delta^2} [ae^2 - 2bde + cd^2 + f(b^2 - ac)].$$

On peut toujours faire en sorte que a soit > 0 ; il suffit donc de considérer le signe de

$$\Delta = ae^2 - 2bde + cd^2 + f(b^2 - ac);$$

c'est le discriminant de la forme obtenue en remplaçant, dans l'équation axiale de la conique, $\lambda \tan \theta$ par x et $\tan \theta$ par y , et l'on a

$$\Delta > 0 \quad \text{hyperbole,}$$

$$\Delta < 0 \quad \text{ellipse.}$$

Si $\Delta = 0$, on a un système de deux points.

Pour déterminer le centre, les axes, etc., il suffit de prendre les équations trouvées en coordonnées parallèles, et d'y remplacer u et v par leurs valeurs en fonction de λ et θ , et les coefficients $A, B, \dots$ par leurs valeurs en fonction de $a, b, \dots$.

VII. — ÉTUDE GÉNÉRALE DES COURBES.

44. *Détermination des points d'une courbe, répondant aux diverses tangentes.* — Si M est le point de contact d'une tangente MT (fig. 8) qui coupe Ox au point T , et si MT' est la tangente infiniment voisine, on a, dans le triangle infinitésimal MTT' ,

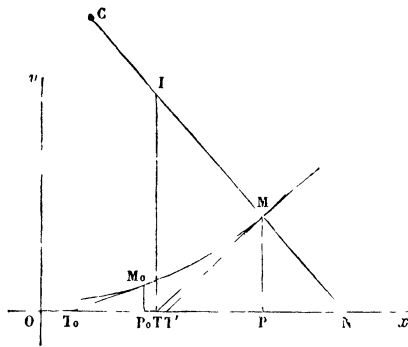
$$\frac{MT}{TT'} = \frac{\sin MT'x}{\sin TMT'}.$$

ou, en désignant, par t la longueur, prise avec son signe, de la tangente MT , et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$(5) \quad t = \frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta.$$

On déduit de là que si la perpendiculaire élevée à Ox

Fig. 8.



par le point T coupe au point I la normale correspondante, on a

$$TI = \frac{d\lambda}{d\theta}.$$

Les coordonnées du point M rapporté à l'axe Ox et à la perpendiculaire Oy à cet axe sont immédiatement données par les formules

$$y = \frac{d\lambda}{d\theta} \sin^2 \theta,$$

$$x = \lambda + \frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta \cos \theta.$$

Remarque. — Les valeurs de θ pour lesquelles $\frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta$ devient infini font connaître les asymptotes.

45. Les coordonnées λ et θ ne permettent pas de définir les droites parallèles à Ox ; mais on peut déterminer les tangentes à une courbe donnée, parallèles à Ox , par leurs distances à cet axe, en cherchant la limite de $y = \frac{d\lambda}{d\theta} \sin^2 \theta$ pour $\theta = K\pi$, et l'on a ensuite les points de contact de ces tangentes en cherchant la limite de

$$x = \lambda + \frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta \cos \theta$$

pour la même valeur de θ .

46. *Rayon de courbure.* — Nous avons appelé I le point où la perpendiculaire à Ox , élevée par le point T, coupe la normale à la courbe au point M; soit C le centre de courbure répondant à ce point M; nous avons, d'après une formule bien connue,

$$d(MT) = CI d\theta;$$

par suite,

$$MC = MT + \frac{d(MT)}{d\theta}$$

ou, en appelant r le rayon de courbure,

$$r = t \cot \theta + \frac{dt}{d\theta},$$

c'est-à-dire, d'après la formule (5),

$$(6) \quad r = 2 \frac{d\lambda}{d\theta} \cos \theta + \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \sin \theta.$$

On a ensuite la longueur d'un arc de la courbe par la formule

$$(7) \quad s = \int_{\theta_0}^{\theta} r d\theta.$$

47. *Évaluation des aires.* — On a très simplement l'aire comprise entre la courbe, l'axe Ox , et deux tan-

gentes quelconques (λ_0, θ_0) et (λ, θ) en divisant cette aire en triangles infinitésimaux par les tangentes menées aux points intermédiaires entre M_0 et M ; la surface de chacun de ces petits triangles est égale à

$$\frac{1}{2} t(t + dt) \sin d\theta,$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, à

$$\frac{t^2 d\theta}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta \right)^2 d\theta;$$

il viendra, par suite, pour l'expression de l'aire cherchée

$$(8) \quad \sigma = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta \right)^2 d\theta.$$

Si l'on veut l'aire Σ comprise entre la courbe, l'axe Ox et les ordonnées M_0P_0 et MP , on a

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma &= \sigma + \text{tr. } MTP - \text{tr. } M_0T_0P_0 \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta \right)^2 d\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta \right)^2 \sin \theta \cos \theta - \left(\frac{d\lambda_0}{d\theta_0} \sin \theta_0 \right)^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \right]. \end{aligned} \right.$$

VIII. — APPLICATIONS.

48. *Trouver une courbe dont la tangente ait une longueur constante l .* — Cette courbe est celle que décrit un point lié par un fil inextensible à un point qui se meut sur une droite indéfinie; de là le nom de *tractrice*.

La formule (5) (n° 44) donne immédiatement pour l'équation différentielle de la courbe

$$l = \frac{d\lambda}{d\theta} \sin \theta \quad \text{ou} \quad d\lambda = \frac{l d\theta}{\sin \theta}.$$

Évaluons maintenant l'aire OAMT; nous avons, d'après la formule (8),

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} l^2 d\theta = \frac{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) l^2}{2}.$$

Or traçons du point O comme centre un cercle de rayon égal à l , c'est-à-dire passant par le point A, et tirons la droite OB parallèle à MT; nous avons

$$\widehat{AOB} = \theta - \frac{\pi}{2};$$

donc

$$\text{aire secteur AOB} = \frac{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) l^2}{2};$$

par suite,

$$\text{aire OAMT} = \text{aire OAB}.$$

Si nous voulons avoir l'aire OAMP, il suffit de retrancher de l'aire précédente celle du triangle MTP; et comme ce triangle est égal à OBK, on voit que

$$\text{aire OAMP} = \text{aire ABK}.$$

Il résulte de l'une ou l'autre de ces expressions que l'aire totale comprise entre la tractrice et l'axe Ox est égale à l'aire du demi-cercle OA₀AA₁.

49. *Trouver une courbe telle que la portion TI (fig. 10) de la perpendiculaire à Ox menée par le pied T de la tangente, et limitée, d'une part à Ox, de l'autre à la normale correspondante, ait une longueur constante l.* — Nous avons vu (n° 44) que

$$TI = \frac{dh}{d\theta};$$

par suite,

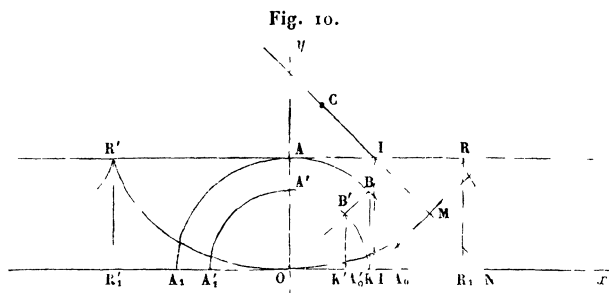
$$\frac{d\lambda}{d\theta} = l$$

et

$$\lambda = l\theta,$$

en prenant $\lambda = 0$ pour $\theta = 0$.

C'est une cycloïde (*fig. 10*) dont les points de rebrous-



sement R, R', ... sont sur la parallèle à OX menée par le point A tel que $OA = l$.

L'équation de la courbe montre que, si l'on trace le demi-cercle A_0A_1 de centre O et de rayon égal à l , on a

$$OT = \text{arc } A_0B.$$

De plus, d'après la formule (5), on a

$$MT = l \sin \theta = BK,$$

BK étant la perpendiculaire abaissée de B sur OX.

La formule (6) donne, pour le rayon de courbure,

$$r = 2l \cos \theta,$$

ou, puisque $TI = l$,

$$MC = 2MI;$$

on reconnaît bien là une des propriétés caractéristiques de la cycloïde.

La formule (7) donne, pour l'arc compté à partir du

point O,

$$s = 2l \int_0^{\theta} \cos \theta \, d\theta = 2l \sin \theta = 2MT = 2BK.$$

L'arc OR a donc pour longueur $2l$.

Quant à l'aire OMT, elle est donnée, d'après la formule (8), par

$$\sigma = \frac{1}{2} \int l^2 \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2 \theta}{2} - \frac{l^2 \sin 2\theta}{4} \right).$$

Mais nous avons

$$\text{aire secteur } OA_0B = \frac{l^2 \theta}{2},$$

$$\text{aire triangle } OBK = \frac{1}{2} l \cos \theta \cdot l \sin \theta = \frac{l^2 \sin 2\theta}{4};$$

par suite,

$$\text{aire OMT} = \frac{\text{aire } A_0BK}{2}.$$

On peut aussi prendre le demi-cercle $A'_0A'A'_1$ de rayon égal à $\frac{l}{\sqrt{2}}$, et qui est coupé par OB au point B'; on a

$$\text{aire OMT} = \text{aire } A'_0B'K'.$$

Il résulte de là que

$$\text{aire ORR}_1 = \frac{\text{aire } A_0BAO}{2} = \text{aire } A'_0B'A'O.$$

50. *Trouver une courbe telle que la distance OD de chacune de ses tangentes au point O soit égale à la longueur MN de la normale correspondante (fig. 11).* — La distance OD du point O à la tangente (λ, θ) est égale à $\lambda \sin \theta$.

Quant à la normale, elle est donnée par

$$MN = MT \tan \theta = \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

On doit donc avoir (¹)

$$\lambda \sin \theta = \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta},$$

ou

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\theta}{\tan \theta}.$$

Intégrons, il vient

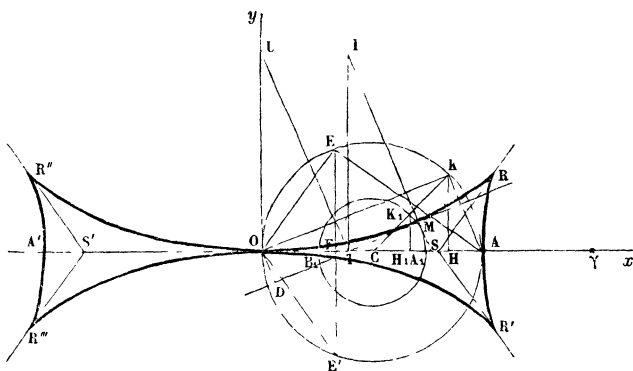
$$L\lambda = L \sin \theta + C$$

ou

$$\lambda = a \sin \theta.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée; étudions en

Fig. 11.



détail ses propriétés géométriques qui, on va le voir, sont assez curieuses.

D'abord la longueur de la tangente est donnée, d'après la formule (5), par

$$t = a \cos \theta \sin \theta.$$

Cette équation, jointe à la précédente, montre que la

(¹) Il est important de remarquer que nous supposons ici les segments OD et MN de part et d'autre de la tangente; dans le cas contraire, il faudrait changer le signe du second membre, et l'on trouverait pour solutions une parallèle à O*x* et un cercle de centre O.

courbe peut se construire point par point de la manière suivante : portons sur l'axe Ox la longueur $OA = a$, et traçons le cercle, de centre C , qui a OA pour diamètre ; tirons la droite OK faisant avec Ox l'angle θ et joignons le point A au point K ; nous avons

$$AK = OA \sin \theta = a \sin \theta = \lambda ;$$

abaissions maintenant sur Ox la perpendiculaire KH ; nous avons

$$KH = AK \cos \theta = a \sin \theta \cos \theta = t ;$$

de là, la construction suivante : *porter sur Ox la longueur $OT = AK$, puis sur la parallèle à OK , menée par le point T , la longueur $TM = HK$; on a ainsi la tangente MT et son point de contact M .*

MN étant la normale, remarquons que

$$TN = \frac{TM}{\cos \theta} = a \sin \theta = OT,$$

propriété que nous pouvons énoncer ainsi : *le segment de l'axe Ox compris entre la tangente et la normale est égal au λ de la tangente.*

De ce que $AK = OT = TN$, résulte l'égalité des triangles OAK et INT , IT étant perpendiculaire à Ox ; par suite,

$$IN = OA = a,$$

c'est-à-dire que *la portion de la normale comprise entre l'axe Ox et la perpendiculaire à cet axe menée par le point T est constante et égale à a .*

Remarquons aussi que $IT = OK$.

Par le point T , élevons à MT une perpendiculaire qui coupe l'axe Oy au point U ; puisque $OT = TN$, les triangles OTU et TNI sont égaux, et par suite

$$TU = NI = a ;$$

le segment TU est de longueur constante; de là ce théorème :

Si l'un des côtés d'un angle droit est de longueur constante et glisse entre deux axes rectangulaires, l'autre côté enveloppe la courbe qui nous occupe. Cela fournit un mode de génération mécanique de cette courbe, par ses tangentes.

Le rayon de courbure, d'après la formule (6), est donné par

$$r = 2a \cos^2 \theta - a \sin^2 \theta = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} \cos 2\theta,$$

expression qui se construit géométriquement de la manière suivante : *prendre sur Ox le segment $C\gamma = 3CH$; le rayon de courbure au point M est égal à $O\gamma$, car*

$$\widehat{KCA} = 2\widehat{KOA} = 2\theta.$$

Valeurs remarquables du rayon de courbure :

Aux points O, $r = 2a$.

Aux points pour lesquels $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$ et qui s'obtiennent en prenant pour la longueur CH le $\frac{1}{3}$ de CA, $r = a$.

Aux points pour lesquels $\theta = \frac{\pi}{4} + K\frac{\pi}{2}$, $r = \frac{a}{2}$.

Aux points A et A', $r = -a$.

Il y a quatre points de rebroussement R, R', R'', R''' correspondants aux valeurs de θ pour lesquelles r s'annule, c'est-à-dire pour lesquelles $\cos 2\theta = -\frac{1}{3}$. Pour obtenir ces points, prenons le segment CF égal à $\frac{CA}{3}$ et compté négativement à partir du point C, puis élevons par le point F la perpendiculaire EE' à Ox; prenant OS = AE, menant par le point S des parallèles à OE et OE', et portant sur ces droites les segments SR et SR' égaux à EF, nous avons les points de rebroussement R

et R'. Les autres sont les symétriques de ceux-ci par rapport à Oy, car la portion de la courbe, à gauche de Oy, répondant aux valeurs de θ comprises entre π et 2π , est symétrique de la portion à droite qui correspond aux valeurs comprises entre 0 et π . D'ailleurs, chacune de ces branches se compose elle-même de deux parties symétriques par rapport à Ox.

La courbe est ainsi parfaitement connue de forme; il reste à en trouver la rectification et la quadrature.

La longueur de l'arc, comptée à partir du point O, est donnée par

$$s = \int_0^\theta r \, d\theta = \int_0^\theta \left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{a\theta}{2} + \frac{3a}{4} \sin 2\theta.$$

Traçons le cercle de centre C, dont le rayon CA₁ est moitié de CA, c'est-à-dire égal à $\frac{a}{4}$; ce cercle est coupé par CK au point K₁; abaissons sur Ox la perpendiculaire K₁H₁; nous avons

$$\text{arc } A_1 K_1 = \frac{a}{4} 2\theta = \frac{a\theta}{2},$$

$$K_1 H_1 = \frac{a}{4} \sin 2\theta;$$

donc

$$\text{arc } OM = \text{arc } A_1 K_1 + 3 K_1 H_1.$$

Pour l'aire comprise entre la courbe, l'axe Ox, et la tangente MT, elle est donnée, d'après la formule (8), par

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \int_0^\theta (a \cos \theta \sin \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{a^2}{8} \int_0^\theta \sin^2 2\theta d\theta = \frac{a^2}{16} \left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right); \end{aligned}$$

Or,

$$\text{aire secteur } CA_1 K_1 = \frac{1}{2} \frac{a^2}{16} 2\theta = \frac{a^2 \theta}{16},$$

$$\text{aire } CK_1 H_1 = \frac{1}{2} \frac{a}{4} \cos 2\theta \frac{a}{4} \sin 2\theta = \frac{a^2 \sin 4\theta}{4 \times 16};$$

(561)

par suite,

$$\text{aire OMT} = \text{aire } \triangle CA_1K_1 - \triangle CK_1H_1 = \text{aire } \triangle A_1K_2H_1.$$

De là résulte que

$$\text{aire ORA} = \text{aire } \triangle A_1K_1B_1$$

et

$$\text{aire ORR}' = \text{aire cercle } A_1B_1.$$

(*A suivre.*)