

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 528-531

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3_528_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3_528_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Maurice d'Ocagne.

La question 1494, proposée par M. Genty, est un cas particulier (¹) du théorème suivant :

Si le point de concours H des diagonales d'un quadrilatère ABCD, inscrit dans une conique, est fixe, et si le côté AB tourne autour d'un point fixe P, le côté opposé CD tourne autour d'un point fixe de la droite PH.

Voici comment je démontre ce théorème :

Prenons pour origine des coordonnées le point H, pour axe des y la droite HP, et posons $HP = d$.

Soit

$$S = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la conique donnée,

$$\begin{array}{ll} \text{Équation de AC.....} & \Delta = y - \mu x = 0, \\ \text{» BD.....} & \Delta' = y - \mu' x = 0, \\ \text{Équation de AB.....} & \Gamma = y - d - \nu x = 0, \\ \text{» CD.....} & \Gamma' = y - \delta - \nu' x = 0, \end{array}$$

μ, μ', δ, ν et ν' sont cinq paramètres variables liés au paramètre variable λ par les cinq équations qui proviennent de l'identification des équations

$$S = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\Delta' + \lambda\Gamma\Gamma' = 0.$$

(¹) Quand les points P et H sont rejetés à l'infini.

Ces équations sont

$$\begin{aligned} \frac{\mu\mu' + \lambda v v'}{A} &= \frac{-(\mu + \mu' + \lambda(v + v'))}{B} = \frac{1 + \lambda}{C} \\ &= \frac{\lambda(\delta v + dv')}{2D} = \frac{-\lambda(d + \delta)}{2E} = \frac{\lambda d \delta}{F}. \end{aligned}$$

De la dernière on tire

$$\delta = \frac{-F d}{2E d + F};$$

donc δ est constant, ce qui montre que CD coupe l'axe des γ , c'est-à-dire PH, en un point fixe; et le théorème est démontré. D'ailleurs, en écrivant la relation précédente

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{d} = -\frac{2E}{F},$$

on voit immédiatement, en appelant Q le point fixe de PH par où passe CD, I et J les points où PH coupe la conique donnée, que le point H a même conjuguée harmonique par rapport aux deux couples de points (I, J) et (P, Q), ce qui détermine géométriquement le point Q.

En transformant par polaires réciproques, on a ce théorème :

Si un quadrilatère ABCD, circonscrit à une conique, a une diagonale BD fixe et si le sommet A décrit une droite Δ , le sommet opposé C décrit une droite Δ' coupant BD au même point que Δ .

La droite BD a même conjuguée harmonique, par rapport aux droites Δ , Δ' et par rapport aux tangentes à la conique donnée issues du point de concours de Δ et Δ' .

Extrait d'une Lettre de M. H. Plamenevsky, maître à l'École Reale Temir Chan-Choura (Caucase), sur la question 1488, de décomposer en deux facteurs du second degré le premier membre de l'équation

$$(1) \quad x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

où l'on suppose $A\sqrt{D} = C$.

On peut considérer les racines de cette équation comme les abscisses des points d'intersection de deux coniques représentées par les équations

$$(2) \quad x^2 - y^2 = r^2,$$

et

$$(3) \quad x^2 = ax + by + c.$$

L'élimination de y entre les équations (2) et (3) donne

$$(4) \quad x^4 - 2ax^3 + (a^2 - b^2 - 2c)x^2 + 2acx + c^2 + b^2r^2 = 0.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les équations (4) et (1), on trouve

$$a = -\frac{A}{2}, \quad c = -\frac{C}{A}, \quad b = \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}}, \quad r^2 = \frac{D - \frac{C^2}{A^2}}{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}}.$$

Mais, par hypothèse, $A\sqrt{D} = C$; il en résulte

$$D - \frac{C^2}{A^2} = 0,$$

et par suite

$$r^2 = 0, \quad x^2 - y^2 = 0, \quad y = \pm x.$$

En remplaçant, dans l'équation (3), a , b , y , c par

ces expressions, il vient

$$x^2 = -\frac{A}{2}x \pm x\sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}} - \frac{C}{A}$$

ou

$$x^2 = \left(-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}}\right)x - \frac{C}{A}.$$

Ces valeurs de x , vérifiant l'équation (4), vérifient de même l'équation proposée (1) : donc on a identiquement

$$\begin{aligned} x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = & \left[x^2 + x \left(\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}} \right) + \frac{C}{A} \right] \\ & \times \left[x^2 + x \left(\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}} \right) + \frac{C}{A} \right]. \end{aligned}$$

On voit que, dans le cas particulier où $A\sqrt{D} = C$, les racines de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

sont les abscisses des points d'intersection d'une parabole et de deux droites représentées par les équations $x + y = 0$, $x - y = 0$.