

## **Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 3  
(1884), p. 483-495

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1884\\_3\\_3\\_483\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3_483_0)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 1450*

(voir 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 288);

PAR M. MORET-BLANC.

1<sup>o</sup> *La somme des  $m^{\text{ièmes}}$  puissances des nombres premiers à  $N$ , et non supérieurs à ce nombre, est divisible par  $N$ , si  $m$  est impair;*

2<sup>o</sup> *La somme des produits  $m$  à  $m$  des nombres premiers à  $N$ , et non supérieurs à ce nombre, est divisible par  $N$ , si  $m$  est impair.* (E. CESARO.)

Les nombres premiers à  $N$ , et non supérieurs à ce nombre, peuvent être associés deux à deux :  $a$  et  $N - a$ ,  $b$  et  $N - b$ , . . . . Ils sont en nombre pair, car on ne peut avoir  $N - a = a$ , ce qui donnerait  $N = 2a$ ;  $a$  serait un diviseur de  $N$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. On suppose  $N > 2$ .

1<sup>o</sup>  $m$  étant impair, la somme des puissances  $m^{\text{ièmes}}$  de deux nombres associés  $a^m + (N - a)^m$  est évidemment divisible par  $N$ , car les termes  $a^m - a^m$  se détruisent, et tous les autres renferment le facteur  $N$  : donc la somme des puissances  $m^{\text{ièmes}}$  de tous les nombres premiers à  $N$ , et non supérieurs à ce nombre, est divisible par  $N$ .

2<sup>o</sup> A tout produit de  $m$  de ces nombres en correspond un autre qui n'en diffère qu'en ce que l'un des nombres y est remplacé par son associé; leur somme est de la forme

$$Aa + A(N - a) = AN, \text{ multiple de } N.$$

Toutes ces sommes partielles étant divisibles par  $N$ , leur

somme, c'est-à-dire celle de tous les produits  $m$  à  $m$  des nombres premiers à  $N$ , et non supérieurs à ce nombre, est divisible par  $N$ .

*Note.* — La même question a été résolue par M. Louis M.

### Question 1460

( voir 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 382 );

PAR M. MORET-BLANC.

*Soient G le centre de gravité d'un tétraèdre ABCD; O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub>, O<sub>3</sub>, O<sub>4</sub> les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres GBCD, GACD, GABD, GABC respectivement. Le centre de gravité du tétraèdre O<sub>1</sub>O<sub>2</sub>O<sub>3</sub>O<sub>4</sub> est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre donné.*

*Même théorème pour le triangle et les cercles circonscrits.* (GENTY.)

Prenons le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD pour origine des coordonnées rectangulaires, et soient  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4$  les coordonnées des sommets A, B, C, D;  $\xi, \eta, \zeta$  celles du point G;  $r$  le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, et  $d$  la distance OG.

Le point O<sub>1</sub> sera à l'intersection des plans perpendiculaires sur les milieux de GB, GC, GD, et aussi sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la face BCD.

Les équations de trois plans sont

$$\begin{aligned} (x_2 - \xi) \left( x - \frac{x_2 + \xi}{2} \right) + (y_2 - \eta) \left( y - \frac{y_2 + \eta}{2} \right) \\ + (z_2 - \zeta) \left( z - \frac{z_2 + \zeta}{2} \right) = 0, \quad \dots \end{aligned}$$

ou

$$(x_2 - \xi)x + (y_2 - \eta)y + (z_2 - \zeta)z = \frac{r^2 - d^2}{2},$$

$$(x_3 - \xi)x + (y_3 - \eta)y + (z_3 - \zeta)z = \frac{r^2 - d^2}{2},$$

$$(x_4 - \xi)x + (y_4 - \eta)y + (z_4 - \zeta)z = \frac{r^2 - d^2}{2}.$$

En ajoutant ces équations membre à membre, pour plus de symétrie, on a l'équation

$$(\xi - x_1)x + (\eta - y_1)y + (\zeta - z_1)z = \frac{3(r^2 - d^2)}{2},$$

qui, avec celles de la perpendiculaire abaissée du point O sur la face BCD, déterminera le point O<sub>1</sub>.

La direction de Ox étant arbitraire, prenons la perpendiculaire au plan BCD, alors on aura, pour le point O<sub>1</sub>,

$$y = 0, \quad z = 0, \\ x = OO_1 = \frac{3(r^2 - d^2)}{2(\xi_1 - x_1)} = \frac{2(r^2 - d^2)}{\frac{4}{3}(\xi - x_1)} = \frac{2(r^2 - d^2)}{h_1},$$

en désignant par  $h_1$  la hauteur du tétraèdre correspondant à la base BCD. Si l'on nomme B<sub>1</sub> cette face et V le volume du tétraèdre, on a

$$h_1 = \frac{3V}{B_1}$$

et

$$OO_1 = \frac{2(r^2 - d^2)}{3V} B_1,$$

de même

$$OO_2 = \frac{2(r^2 - d^2)}{3V} B_2,$$

$$OO_3 = \frac{2(r^2 - d^2)}{3V} B_3, \quad OO_4 = \frac{2(r^2 - d^2)}{3V} B_4.$$

Les longueurs OO<sub>1</sub>, OO<sub>2</sub>, OO<sub>3</sub>, OO<sub>4</sub> sont donc proportionnelles aux faces du tétraèdre auxquelles elles sont perpendiculaires.

Or, si l'on projette sur un plan quelconque les faces d'un tétraèdre, les projections étant affectées du même signe ou de signes différents suivant qu'elles sont ou non du même côté de la face projetée que le sommet qui lui est opposé, la somme algébrique des projections est nulle; il en sera de même en projetant sur un axe les perpendiculaires à ces faces, proportionnelles à leurs aires.

Il résulte de là que quatre forces, représentées par  $OO_1$ ,  $OO_2$ ,  $OO_3$ ,  $OO_4$ , se font équilibre, et, par suite, d'après un théorème connu, que le point  $O$  est le centre de gravité du tétraèdre  $O_1O_2O_3O_4$ .

Un calcul et un raisonnement tout semblables appliqués à un triangle  $ABC$  prouvent que le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les centres des cercles qui passent par deux sommets du triangle  $ABC$  et par son centre de gravité est le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ .

De ce qui précède résultent aussi les théorèmes suivants :

I. *Si deux tétraèdres sont tels que les médianes <sup>(1)</sup> du premier soient perpendiculaires aux faces du second, réciproquement les médianes du second seront perpendiculaires aux faces du premier.*

II. *Si, à partir du centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, on porte sur les perpendiculaires aux faces des longueurs proportionnelles à leurs aires, les quatre extrémités sont les sommets d'un second tétraèdre; ce tétraèdre et le premier jouissent de la propriété énoncée dans le théorème précédent; de plus, le centre de gra-*

---

(<sup>1</sup>) J'appelle *médiane d'un tétraèdre* la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée.

vité du second est le centre de la sphère circonscrite au premier.

Théorèmes analogues pour le triangle.

---

### Question 1464

( voir 3<sup>e</sup> série, t. II. p. 383 );

PAR M. LÉON CLÉMENT,

Du lycée de Rouen (Mathématiques spéciales).

L'énoncé doit être rectifié comme il suit :

*On donne deux paraboles  $y^2 = 2c(x \pm c)$ ; une tangente à l'une de ces paraboles rencontre l'autre aux points P, Q; sur PQ, comme diamètre, on décrit un cercle qui rencontre la seconde parabole en deux nouveaux points R, S : prouver que la droite RS est tangente à la seconde parabole.*

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point  $x = c$ ,  $y = 0$ . Les équations des paraboles deviendront

$$(A) \quad y^2 = 2cx$$

et

$$(B) \quad y^2 = 2cx + 4c^2.$$

Soient  $y - \alpha x - \frac{c}{2\alpha} = 0$  l'équation de la tangente PQ à la parabole (A), et  $y + \alpha x + \beta = 0$  l'équation de la droite RS.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection P, Q, R, S des droites PQ, RS, avec la parabole (B), est

$$\lambda(y^2 - 2cx - 4c^2) + \left(y - \alpha x - \frac{c}{2\alpha}\right)(y + \alpha x + \beta) = 0$$

ou

$$- \alpha^2 x^2 + (\lambda + 1)y^2 - \left(2c\lambda + \frac{c}{2} + \alpha\beta\right)x - \left(\frac{c}{2\alpha} - \beta\right)y + \frac{\beta c}{2\alpha} - 4\lambda c^2 = 0.$$

Pour que cette dernière équation représente un cercle, il faut que  $\lambda = -(1 + \alpha^2)$ .

L'équation du cercle devient alors

$$\alpha^2 x^2 + x^2 y^2 + \left(\alpha\beta - \frac{3c}{2} - 2c\alpha^2\right)x - \left(\frac{c}{2\alpha} - \beta\right)y + \frac{\beta c}{2\alpha} - 4c^2(1 + \alpha^2) = 0.$$

Exprimons que le centre de ce cercle est sur la droite PQ.

Les coordonnées de ce centre sont données par les équations

$$2\alpha^2 x + \alpha\beta - \frac{3c}{2} - 2c\alpha^2 = 0,$$

et

$$2\alpha^2 y + \frac{c}{2\alpha} - \beta = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$2\alpha y + \frac{c}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Il faut éliminer  $x$  et  $y$  entre ces deux équations et l'équation de la droite PQ, qui est  $y - \alpha x = \frac{c}{2\alpha}$ .

Les équations du centre donnent, en les retranchant membre à membre,

$$2\alpha(y - \alpha x) + \frac{c}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} - \alpha\beta + \frac{3c}{2} + 2c\alpha^2 = 0;$$

d'où, en ayant égard à l'équation de PQ,

$$c + \frac{c}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} - \alpha\beta + \frac{3c}{2} + 2c\alpha^2 = 0,$$

ce qui revient à

$$\begin{aligned} & 4c^4 + cx^2 - 2\alpha^2\beta + 4cx^2 + c - 2\alpha\beta = 0 \\ \text{ou} \\ & \alpha^2(4cx^2 + c - 2\alpha\beta) + 4cx^2 + c - 2\alpha\beta = 0, \\ & (\alpha^2 + 1)(4cx^2 + c - 2\alpha\beta) = 0, \\ & 4cx^2 + c - 2\alpha\beta = 0. \end{aligned}$$

Or cette dernière équation exprime précisément que la droite RS,  $y + \alpha x + \beta = 0$ , est tangente à la parabole (B).

Le cercle décrit sur PQ comme diamètre est donc tangent à la parabole (B) (1).

(1) Un calcul assez simple détermine avec précision le point de contact de ces deux courbes. Il est d'abord évident que les axes des paraboles (A), (B) coïncident avec l'axe des  $x$ , et que, par suite, toute droite parallèle à l'axe des  $x$  est un diamètre commun aux deux courbes. Il résulte aussi des équations de (A) et (B) que la partie d'un diamètre comprise entre les deux paraboles est constamment égale à leur paramètre  $2c$ .

Cela admis, soient  $a$  le point de contact de la tangente PQ à la parabole (A), et  $ab$  une parallèle à l'axe des  $x$ , rencontrant la parabole (B) au point  $b$ . La tangente menée à (B), au point  $b$ , sera parallèle à PQ, parce que les ordonnées des points  $b$ ,  $a$  sont égales entre elles, et que les deux paraboles ont le même paramètre  $2c$ . Donc le diamètre  $ba$  de (B) divise en deux parties égales la corde PQ de (B); par conséquent, le point  $a$  est le centre du cercle décrit sur PQ comme diamètre.

En nommant  $\alpha$  le coefficient angulaire de la tangente PQ, l'ordonnée du point de contact  $a$  est  $\frac{c}{\alpha}$ , et l'abscisse  $\frac{c}{2\alpha^2}$ ; ce sont les coordonnées du centre du cercle considéré; la valeur de son rayon  $\frac{PQ}{2}$  ou  $aP$  résulte du calcul suivant.

L'équation de la parabole (A), rapportée à son diamètre  $ba$  et à sa tangente PQ, est  $y'^2 = 2\left(\frac{c}{x'} + c\right)x'$ .

Pour  $x' = 2c$ ,  $y'^2 = \frac{4c^2}{\alpha^2} + 4c^2$ . Or  $y' = aP$ , parce que  $2c = ba$ ; donc le carré du rayon du cercle est égal à  $\frac{4c^2}{\alpha^2} + 4c^2$ .

Actuellement soit  $b'$  le point symétrique de  $b$ , par rapport à

## Question 1487

(voir 3<sup>e</sup> série, t. III, p. 160);

PAR M. J. RICHARD,

Élève au lycée Saint-Louis.

A un triangle ABC on circonscrit une conique de centre  $(x, y, z)$ . On sait que les droites qui joignent chaque sommet du triangle au pôle du côté opposé se coupent en un même point  $(x', y', z')$ . Démontrer qu'il y a réciprocité entre les points  $(x, y, z)$ ,  $(x', y', z')$ , et que cette réciprocité est définie par les relations

$$\frac{yz' + zy'}{a} = \frac{zx' + xz'}{b} = \frac{xy' + yx'}{c},$$

où  $a, b, c$  sont les côtés de ABC. (E. CESARO.)

En désignant par  $x, y, z$  les distances d'un point du plan du triangle aux côtés BC, AC, AB, l'équation d'une conique circonscrite au triangle est

$$(1) \quad \lambda yz + \mu zx + \nu xy = 0,$$

l'axe des  $x$ . Le triangle  $b'ba$  rectangle en  $b$  donne  $\overline{ab'}^2 = \overline{bb'}^2 + \overline{ba}^2$ . Mais, en valeur absolue,  $bb'$ , qui est le double de l'ordonnée de  $b$ , est égal à  $\frac{2c}{\alpha}$ , et  $ba = 2c$ ; il s'ensuit  $\overline{ab'}^2 = \frac{4c^2}{\alpha^2} + 4c^2 = \overline{aP}^2$ , d'où  $ab' = aP$ .

Ainsi, le point  $b'$  appartient au cercle dont PQ est diamètre.

De plus, la droite  $ab'$  est normale à la parabole (B) au point  $b'$ . Car, soient  $g$  et  $h$  les pieds des ordonnées de  $a$  et  $b'$ , et  $m$  le point d'intersection de  $ab'$  et de l'axe des  $x$ ; on a évidemment

$$mh = mg = \frac{hg}{2} = \frac{ba}{2} = c,$$

c'est-à-dire que la projection de  $mb'$  sur l'axe de la parabole (B) est égale à la moitié du paramètre de (B). Donc  $mb'$  est normale à (B). Par conséquent, le cercle décrit sur PQ comme diamètre est tangent à la parabole (B), au point  $b'$ . G.

et la droite de l'infini a pour équation

$$(2) \quad ax + by + cz = 0.$$

Nous exprimerons qu'un point  $(x, y, z)$  est centre de la conique en écrivant que la polaire de ce point coïncide avec la droite de l'infini, ce qui donne

$$(3) \quad \frac{vy + \mu z}{a} = \frac{\lambda z + vx}{b} = \frac{\mu x + \lambda y}{c}.$$

D'autre part, cherchons l'équation de la droite qui joint le sommet A du triangle au pôle du côté opposé BC. Le pôle de ce côté est, sur chacune des tangentes à la conique, en B et C, c'est-à-dire sur les droites représentées par les équations

$$\frac{z}{v} + \frac{x}{\lambda} = 0, \quad \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 0.$$

Par conséquent, ses coordonnées  $x', y', z'$  vérifient l'équation  $\frac{y'}{\mu} - \frac{z'}{v} = 0$ , qu'on obtient en retranchant, membre à membre, les deux équations précédentes.

Les coordonnées  $x', y', z'$  du point de concours des droites qui joignent chacun des sommets du triangle au pôle du côté opposé vérifient donc les trois équations

$$\frac{y'}{\mu} - \frac{z'}{v} = 0, \quad \frac{z'}{v} - \frac{x'}{\lambda} = 0, \quad \frac{x'}{\lambda} - \frac{y'}{\mu} = 0,$$

ce qui montre que  $x', y', z'$  sont proportionnelles à  $\lambda, \mu, v$ .

En remplaçant  $\lambda, \mu, v$  par  $x', y', z'$  dans les équations (3) qui sont homogènes, on a

$$\frac{yz' + zy'}{a} = \frac{zx' + xz'}{b} = \frac{xy' + yx'}{c}.$$

Ce sont précisément les relations qu'il fallait démontrer.

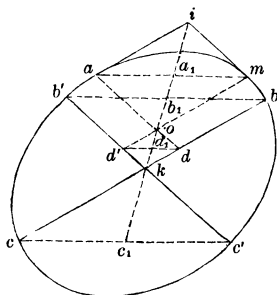
Ces relations ne changent pas lorsqu'on y permute les

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Goffart et Moret-Blanc.

(voir 3<sup>e</sup> série, t. III, p. 352);

•

(GENTY.)



Or,  $ad$ , étant le diamètre conjugué à la direction  $ai$ , coupe  $ik$  au centre  $o$  de la conique (ou lui est parallèle, dans le cas de la parabole). Mais il résulte de la simili-

tude des triangles  $dod_1$  et  $aoa_1$  (angle  $d = a$ ,  $d_1 = a_1$ )  
que les triangles  $d_1od'$  et  $a_1om$  sont aussi semblables

$$\left( d_1 = a_1, \quad \frac{od_1}{oa_1} = \frac{d_1d'}{a_1m} = \frac{dd_1}{aa_1} \right),$$

et par suite que  $d'om$  est une ligne droite; c'est donc le diamètre conjugué à la direction  $b'c'$  et par suite  $mi$  est parallèle à  $b'c'$ .

*Note.* — M. Victor de Strékalof, à Saint-Petersbourg, et MM. Pisani et Moret-Blanc ont donné, de même, une solution géométrique de la question proposée; MM. L. Amouroux, du lycée de Grenoble, et J. Richard l'ont résolue par les formules de la Géométrie analytique.

### Question 1499

(voir 3<sup>e</sup> série, t. III, p. 400);

PAR M. J. RICHARD.

*On donne l'arête de base et la hauteur d'une pyramide régulière dont la base est un carré. Trouver l'angle compris entre deux faces latérales.*

(GENEIX-MARTIN.)

Soient SABCD la pyramide,  $h$  la hauteur SO,  $a$  l'arête de la base (<sup>1</sup>).

Le plan SBD étant perpendiculaire à la diagonale AC, on peut mener par AC un plan perpendiculaire à SB. Soit M le point où ce plan rencontre SB. Il s'agit d'évaluer l'angle AMC.

On a d'abord

$$OA = OB = OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

et

$$SB = \sqrt{OB^2 + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}.$$

(<sup>1</sup>) Le lecteur est prié de faire la figure.

Dans le triangle rectangle SOB,

$$OM \times SB = SO \times OB$$

ou

$$OM \times \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2} = \frac{ah}{2};$$

d'où

$$OM = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}.$$

Or

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} \text{AMC} &= \tan \text{AMO} = \frac{AO}{MO} \\ &= \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + 2h^2}}{ah} = \frac{\sqrt{2a^2 + 4h^2}}{2h}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la tangente de la moitié de l'angle cherché est égale à  $\frac{\sqrt{2a^2 + 4h^2}}{2h}$ .

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Goffart.

### Question 1501

(voir 3<sup>e</sup> série, t. III, p. 400);

PAR M. MORET-BLANC.

*Par le sommet A d'un triangle ABC, on mène des perpendiculaires aux côtés AB, AC, qui rencontrent en D et E la circonférence circonscrite au triangle. Démontrer que le quadrilatère ADBE (ou ADCE) est équivalent au triangle.* (B. REYNOLDS, M. A.)

On a, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle,

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AD}{\cos C} = \frac{AE}{\cos B} = 2R,$$

$$\text{surf. } ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\text{surf. } ABD = \frac{1}{2} AB \cdot AD = 2R^2 \sin C \cos C,$$

$$\text{surf. } ABE = \frac{1}{2} AB \cdot AE \cos A = 2R^2 \sin C \cos A \cos B,$$

d'où

$$\text{surf. ADBE} = 2 R^2 \sin C (\cos C + \cos A \cos B);$$

mais

$$\cos C = -\cos(A + B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B,$$

donc

$$\text{surf. ADBE} = 2 R^2 \sin A \sin B \sin C = \text{surf. ABC}.$$

On trouve de même

$$\text{surf. ADCE} = \text{surf. ABC}.$$

En projetant la figure sur un plan quelconque, on a ce théorème plus général :

*Par le sommet A d'un triangle ABC inscrit dans une ellipse, on mène les cordes AD, AE respectivement supplémentaires de AB et AC. Le quadrilatère ADBE (ou ADCE) est équivalent au triangle.*

*Nota.* — La même question a été résolue par M. Goffart.