

E. CESÀRO

Propriétés d'une fonction arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 431-434

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__431_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS D'UNE FONCTION ARITHMÉTIQUE;

PAR M. E. CESARO.

I. Ayant décomposé p , de toutes les manières possibles, en n nombres entiers, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$,

posons

$$u_{n,p} = \sum \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots(1+x_n)}.$$

Cette fonction u jouit de curieuses propriétés, que nous allons énoncer, en laissant au lecteur le soin de chercher les démonstrations.

Nous supposons $u_{n,p} = 0$, si n est inférieur à 1, ou supérieur à p .

II. THÉORÈME. — B_p étant le $p^{\text{ième}}$ des nombres de Bernoulli, définis par l'égalité symbolique

$$(B+1)^p - B^p = 0,$$

on a

$$B_p = 1.2.3\dots p \left[\frac{1}{1+u} \right]^p,$$

pourvu que, après avoir développé le second membre par rapport aux puissances croissantes de u , on remplace u^n par $u_{n,p}$.

En d'autres termes,

$$\frac{B_p}{1.2.3\dots p} = -C_{p,1}u_{1,p} + C_{p+1,2}u_{2,p} - C_{p+2,3}u_{3,p} + \dots \pm C_{2p-1,p}u_{p,p}.$$

Par exemple,

$$\frac{B_4}{1.2.3.4} = -4u_{1,4} + 10u_{2,4} - 20u_{3,4} + 35u_{4,4}.$$

Or

$$u_{1,4} = \frac{1}{5},$$

$$u_{2,4} = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.2} = \frac{13}{36},$$

$$u_{3,4} = \frac{1}{2.2.3} + \frac{1}{2.3.2} + \frac{1}{3.2.2} = \frac{1}{4},$$

$$u_{4,4} = \frac{1}{2.2.2.2} = \frac{1}{16};$$

par conséquent

$$B_4 = 24 \left(-\frac{4}{5} + \frac{65}{18} - 5 + \frac{35}{16} \right) = -\frac{1}{30}.$$

III. $S_{n,p}$ étant la somme des produits p à p , des n premiers nombres naturels, on a *symboliquement*

$$\frac{S_{n-p+1,p}}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+p)} = [1+u]^n.$$

Par exemple, pour $p = 3$, on trouve, après quelques transformations,

$$S_{n,3} = 6C_{n+1,4} + 20C_{n+1,5} + 15C_{n+1,6}.$$

Si l'on ordonne $S_{n,p}$ par rapport aux puissances de n , on reconnaît que $-\frac{B_p}{p}$ est le coefficient de n .

IV. Si l'on pose

$$A_p = \frac{u_{1,p}}{1} + \frac{u_{2,p}}{1.2} + \frac{u_{3,p}}{1.2.3} + \frac{u_{4,p}}{1.2.3.4} + \dots,$$

on a, *symboliquement*,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{1+Ax},$$

c'est-à-dire

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 - \dots \right].$$

V. On a

$$\begin{aligned} u_{1,p} &= \frac{1}{p+1}, \\ u_{2,p} &= \frac{2}{p+2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{p} \right), \\ &\dots\dots\dots, \\ u_{p,p} &= \frac{1}{2^p}. \end{aligned}$$

On peut calculer les valeurs de la fonction u au

moyen de la relation

$$(n+p)u_{n,p} = (n+p-1)u_{n,p-1} + nu_{n-1,p-1}.$$

On obtient ainsi le Tableau suivant :

	$u_{1,p}$	$u_{2,p}$	$u_{3,p}$	$u_{4,p}$	$u_{5,p}$	...
$u_{n,1}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	...
$u_{n,2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	...
$u_{n,3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	0	0	...
$u_{n,4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{16}$	0	...
$u_{n,5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{17}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{32}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

VI. Voici quelques autres propriétés de la fonction u :

$$C_{p+1,1}u_{1,p} - C_{p+2,2}u_{2,p} + C_{p+3,3}u_{3,p} - \dots + C_{2p,p}u_{p,p} = -\frac{1}{1.2.3\dots p},$$

$$C_{p+2,1}u_{1,p} - C_{p+3,2}u_{2,p} + C_{p+4,3}u_{3,p} - \dots + C_{2p+1,p}u_{p,p} = -\frac{2^{p+1} - (p-1)}{1.2\dots 3(p+1)},$$

$$\frac{u_{1,p}}{1} - \frac{u_{2,p-1}}{1.2} + \frac{u_{3,p-2}}{1.2.3} - \frac{u_{4,p-3}}{1.2.3.4} + \dots = \frac{p}{1.2.3\dots(p-1)},$$

$$\frac{u_{1,p}}{1} - \frac{u_{2,p-1}}{1.2} + \frac{u_{3,p-2}}{1.2.3} - \frac{u_{4,p-3}}{1.2.3.4} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \dots = \frac{1}{2.3.4\dots p}.$$