

C. MARGERIE

**Calcul à $\frac{1}{10^n}$ près des racines
incommensurables d'une équation
numérique dont toutes les racines sont réelles**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 33-37

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__33_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CALCUL A $\frac{1}{10^n}$ PRÈS DES RACINES INCOMMENSURABLES D'UNE
ÉQUATION NUMÉRIQUE DONT TOUTES LES RACINES SONT
RÉELLES;**

PAR M. C. MARGERIE.

1. *Calcul de la plus grande racine positive.* — Soit l'équation

$$f(x) = 0,$$

dont toutes les racines sont réelles.

Si λ_1 est la limite supérieure de ses racines positives calculée par la *méthode de Newton*, $\lambda_1 - 1$ est la partie entière α de la plus grande racine positive A .

L'équation

$$\varphi(y) = f(y + \alpha) = 0$$

n'a qu'une racine positive égale à $A - \alpha$, et la racine positive de l'équation

$$\psi(z) = \varphi\left(\frac{z}{10}\right) = 0$$

a pour partie entière le chiffre β des dixièmes de A écrite sous forme décimale. Si λ_2 est le plus petit nombre entier rendant $\psi(z)$ positif, $\beta = \lambda_2 - 1$.

L'équation

$$\chi(t) = \psi(z + \beta) = 0$$

n'a qu'une racine positive dont la partie entière est

nulle et dont le chiffre des dixièmes est le chiffre des centièmes γ de A.

γ sera donc le chiffre des unités simples de la racine positive de l'équation

$$\xi(u) = \chi\left(\frac{u}{10}\right) = 0$$

et s'obtiendra en diminuant de l'unité le plus petit nombre entier qui rend $\xi(u)$ positif.

On calculera ainsi successivement les chiffres des différentes unités décimales qui entrent dans A.

REMARQUE. — En prenant la partie entière de la racine positive de l'équation

$$\psi_1(z_1) = \varphi\left(\frac{z_1}{10^m}\right) = 0,$$

on aurait le nombre formé par l'ensemble des m premiers chiffres décimaux de A; mais, pratiquement, ce nombre serait difficile à trouver. Il faut opérer comme nous l'avons indiqué.

2. *Calcul de la plus petite racine positive.* — Si a est la plus petite racine positive de

$$f(x) = 0,$$

et Λ_1 la plus grande racine positive de

$$f_1(x_1) = f\left(\frac{1}{x_1}\right) = 0,$$

on a

$$a = \frac{1}{\Lambda_1},$$

et si l'on veut a avec p chiffres exacts, par défaut, on calculera Λ_1 avec $p + 1$ chiffres exacts par excès.

3. *Calcul d'une racine positive quelconque.* — Soit ρ la plus petite racine de l'équation

$$f(x) = 0$$

supérieure au nombre positif p .

$\rho - p$ sera la plus petite racine positive de l'équation

$$\zeta(w) = f(w + p) = 0.$$

La connaissance de cette racine conduira à la valeur de ρ .

4. *Calcul des racines négatives.* — On calculera les racines positives de la transformée en $-x$, et l'on affectera les racines trouvées du signe $-$.

5. *Première application.* — Calcul à $\frac{1}{10^3}$ par défaut de la plus grande racine positive A de l'équation

$$f = x^3 - 5x^2 - 14x - 8 = 0.$$

α . *Recherche de la partie entière.*

$$f = x^3 - 5x^2 - 14x - 8 \qquad 8,$$

$$f' = 3x^2 - 10x - 14 \qquad 5,$$

$$f'' = 2(3x - 5) \qquad 2,$$

$$f''' = 6.$$

Partie entière : $8 - 1 = 7$.

β . *Recherche du chiffre des dixièmes.*

$$\varphi(y) = f(y + 7) = y^3 + 16y^2 + 63y - 8 = 0,$$

$$\varphi_1(z) = \varphi\left(\frac{z}{10}\right) = z^3 + 160z^2 + 6300z - 8000 = 0;$$

2 rend $\varphi_1(z)$ positif, donc le chiffre des dixièmes est 1.

γ. *Recherche du chiffre des centièmes.*

$$\psi(t) = \varphi_1(t+1) = t^3 + 163t^2 + 6623t - 1539 = 0,$$

$$\psi_1(u) = \psi\left(\frac{u}{10}\right) = u^3 + 1630u^2 + 662300u - 1539000 = 0.$$

3 rend $\psi_1(u)$ positif, donc le chiffre des centièmes est 2.

δ. *Recherche du chiffre des millièmes.*

$$\chi(v) = \psi_1(v+2) = v^3 + 3266v^2 + 668832v - 207872 = 0,$$

$$\begin{aligned}\chi_1(w) &= \chi\left(\frac{w}{10}\right) \\ &= w^3 + 32660w^2 + 66883200w - 207872000 = 0.\end{aligned}$$

4 rend $\chi_1(w)$ positif, donc le chiffre des millièmes est 3.

La racine cherchée a pour valeur 7,123 à $\frac{1}{10^3}$ par défaut.

6. *Seconde application.* — L'équation

$$f = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 3x - 4 = 0$$

a une racine ρ comprise entre 2 et 3, calculer cette racine à $\frac{1}{100}$ près par défaut.

$$\varphi(y) = f(y+2) = y^4 + y^3 - 5y^2 - 3y + 2 = 0,$$

$$\psi(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 2z^4 - 3z^3 - 5z^2 + z + 1 = 0;$$

si a est la plus grande racine de $\psi(z)$,

$$\rho = 2 + \frac{1}{a}.$$

Il faut calculer a avec trois chiffres exacts, par excès.

α. *Calcul de la partie entière de a.*

$$\psi = 2z^4 - 3z^3 - 5z^2 + z + 1 \quad 3,$$

$$\psi' = 8z^3 - 9z^2 - 10z + 1 \quad 2,$$

$$\psi'' = 2(12z^2 - 9z - 5) \quad 2,$$

$$\psi''' = 6(8z - 3) \quad 1.$$

La partie entière de a est 3 — 1 ou 2.

β. *Calcul du chiffre des dixièmes de a.*

$$\chi(t) = \psi(t+2) = 2t^4 + 13t^3 + 25t^2 + 9t - 9 = 0,$$

$$\chi_1(u) = \chi\left(\frac{u}{10}\right) = 2u^4 + 130u^3 + 2500u^2 + 9000u - 90000 = 0.$$

5 rend $\chi_1(u)$ positif, le chiffre des dixièmes de a est 4.

γ. *Calcul du chiffre des centièmes de a.*

$$\xi(v) = \chi_1(v+4) = 2v^4 + 162v^3 + 4252v^2 + 35752v - 5168 = 0,$$

$$\xi_1(w) = \xi\left(\frac{w}{10}\right) = 2w^4 + 1620w^3 + 425200w^2$$

$$+ 35752000w - 51680000 = 0;$$

2 rend $\xi_1(w)$ positif, donc 2 est le chiffre des centièmes de a , par excès.

$$\rho = 2 + \frac{1}{2,42} = 2,41.$$
