Nouvelles annales de mathématiques

A. Legoux

Note sur un faisceau de surfaces d'ordre quelconque [suite]

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 161-172

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__161_0>

NOTE SUR UN FAISCEAU DE SURFACES D'ORDRE QUELCONQUE
[SUITE (1)];

PAR M. A. LEGOUX.

CONSIDÉRATIONS SUR LES SURFACES HOMOFOCALES ET ORTHOGONALES.

Recherche des caractéristiques du système de surfaces de U.

On sait que Chasles appelle *caractéristiques d'un système de surfaces :* 1° le nombre de ces surfaces qui passent par un point donné; 2° le nombre des surfaces tangentes à une droite donnée; 3° le nombre des surfaces tangentes à un plan donné.

La première des caractéristiques est évidemment l'unité.

Le nombre des surfaces du système qui sont tangentes à une droite donnée est égal au nombre des courbes situées sur la surface et dans un plan passant par la droite donnée, tangentes à cette droite; ce qui revient à dire que ce nombre est le même que la seconde caractéristique du système de courbes planes représentées par l'intersection des surfaces U avec un plan quelconque

$$u = Ax + By + Cz,$$

ou bien des courbes dont l'équation est

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma (Ax + By + Cz)^\delta + Kw^\epsilon = 0,$$

(1) Voir 3e série, t. II, p. 233.

où l'on suppose que dans w on a remplacé u par sa valeur en x, y, z.

Or l'équation précédente est de la forme

$$u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma u_4^\delta u_5^\varepsilon = \mathrm{K},$$

avec la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0.$$

$u_1, u_2, u_3, \ldots$ représentant des fonctions linéaires des coordonnées, savoir

$$u_1 = a_1 x + b_1 y - c_1 z, \quad u_2 = a_2 x - b_2 y + c_2 z, \quad \ldots,$$

l'équation différentielle de ces courbes planes est

$$\alpha \frac{du_1}{u_1} + \beta \frac{du_2}{u_2} + \gamma \frac{du_3}{u_3} + \ldots = 0;$$

et l'on voit bien facilement qu'on peut la mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \alpha u_2 u_3 u_4 \Big[(a_1 b_5 - b_1 a_5)\left(y - x \frac{dy}{dr}\right) \\ + (b_1 c_5 - b_5 c_1) z \frac{dy}{dx} + (a_1 c_5 - c_1 a_5) z \Big] \\ + \beta u_3 u_4 u_1 [\ldots] + \ldots = 0, \end{aligned}$$

ou bien encore

$$\mathrm{P}\left(y - x \frac{dy}{dx}\right) + \mathrm{Q} \frac{dy}{dx} + \mathrm{R} = 0,$$

P, Q, R représentant des polynômes du troisième degré en x, y, z.

Or, si l'on donne le coefficient angulaire de la tangente $\frac{dy}{dx}$ et l'ordonnée à l'origine $y - x \frac{dy}{dx}$, on aura une équation du troisième ordre pour déterminer les points de contact. Il existe donc trois courbes du système tangentes à une droite donnée. D'après ce qui a été dit plus haut, la seconde caractéristique du système de surfaces est donc 3.

Cherchons enfin combien il existe de surfaces du système tangentes à un plan donné

$$AX - BY + CZ + DU = o.$$

En désignant par x, y, z, u les coordonnées d'un des points de contact, on trouve, pour déterminer ces coordonnées, les relations suivantes :

$$\frac{a\varepsilon - \frac{\alpha\varpi}{x}}{A} = \frac{b\varepsilon - \frac{\beta\varpi}{y}}{B} = \frac{c\varepsilon - \frac{\gamma\varpi}{z}}{C} = \frac{d\varepsilon - \frac{\delta\varpi}{u}}{D},$$
$$Ax + By + Cz + Du = o.$$

Prenons pour inconnue auxiliaire le rapport commun; soit λ ce rapport, on aura

$$a\varepsilon - \frac{\alpha\varpi}{x} = \lambda A, \quad b\varepsilon - \frac{\beta\varpi}{y} = \lambda B,$$
$$c\varepsilon - \frac{\gamma\varpi}{z} = \lambda C, \quad d\varepsilon - \frac{\delta\varpi}{u} = \lambda D.$$

Tirant de là les valeurs de x, y, z, u et remplaçant dans la dernière équation, il vient, pour déterminer λ,

$$(5)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A\alpha}{a\varepsilon - \lambda A} + \dfrac{B\beta}{b\varepsilon - \lambda B} + \dfrac{C\gamma}{c\varepsilon - \lambda C} + \dfrac{D\delta}{d\varepsilon - \lambda D} = o \\ \text{ou} \\ \dfrac{\alpha}{\lambda - \frac{a\varepsilon}{A}} + \dfrac{\beta}{\lambda - \frac{b\varepsilon}{B}} + \dfrac{\gamma}{\lambda - \frac{c\varepsilon}{C}} + \dfrac{\delta}{\lambda - \frac{d\varepsilon}{D}} = o. \end{array}\right.$$

C'est une équation du troisième degré en λ qui a ses trois racines réelles et, comme à chaque valeur de λ correspond un système unique de valeurs pour x, y, z, u, il en résulte qu'il existe trois surfaces du système tangentes à un plan donné et que la troisième caractéristique est 3. On aura donc un système (1, 3, 3) d'après les notations de Chasles, et ces surfaces U jouissent de toutes les propriétés communes aux surfaces de ce système.

Si l'on considère les transformées des surfaces précédentes par le principe de dualité, on aura des surfaces faisant partie du système (3, 3, 1), c'est-à-dire qu'il en passera trois par un point quelconque de l'espace et que l'on aura par suite un système triple. Nous verrons bientôt que ce système triple devient dans un cas particulier un système triple orthogonal et que les surfaces qui constituent ce système n'ont pas d'enveloppe, autrement dit que le système de surfaces orthogonales ne forme pas un système homofocal. La considération des courbes paraboliques tracées sur les surfaces U nous conduira sans peine à ce résultat remarquable.

Théorème. — *Les trois points de contact des trois surfaces du système* U *qui touchent un plan quelconque sont les trois sommets d'un triangle conjugué relativement à la section du cône* (4) *par ce plan.*

Pour démontrer ce théorème, cherchons les équations de condition qui doivent être satisfaites pour que le triangle, ayant pour sommets les points de contact des trois surfaces U qui touchent un plan quelconque, soit un triangle conjugué relativement à la section du cône (4) par ce plan.

Soient λ_1, λ_2, λ_3 les trois racines de l'équation en λ; x_1, y_1, z_1, u_1 les valeurs de x, y, z, u correspondant à λ_1; x_2, y_2, z_2, u_2 les valeurs correspondant à λ_2, etc.

L'équation du cône (4) peut être mise sous la forme simple

$$(4\ bis)\qquad \frac{a^2x^2}{\alpha}+\frac{b^2y^2}{\beta}+\frac{c^2z^2}{\gamma}+\frac{d^2u^2}{\delta}=\frac{w^2}{\varepsilon}\ (^1);$$

(1) Voir même Recueil, 3e série, t. II, p. 77.

l'équation du plan polaire du point (x_1, y_1, z_1, u_1) relativement à ce cône est

$$\left(a w_1 - \frac{\varepsilon}{\alpha} a^2 x_1\right) X + \left(b w_1 - \frac{\varepsilon}{\beta} b^2 y_1\right) Y + \left(c w_1 - \frac{\varepsilon}{\gamma} c^2 z_1\right) Z + \left(d w_1 - \frac{\varepsilon}{\delta} d^2 u_1\right) U = 0.$$

En exprimant que ce plan passe par les deux autres points (x_2, y_2, z_2, u_2), (x_3, y_3, z_3, u_3), on a

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{w_1 w_2}{\varepsilon} + \frac{a^2 x_1 x_2}{\alpha} + \frac{b^2 y_1 y_2}{\beta} + \frac{c^2 z_1 z_2}{\gamma} + \frac{d^2 u_1 u_2}{\delta} = 0, \\ &-\frac{w_1 w_3}{\varepsilon} + \frac{a^2 x_1 x_3}{\alpha} + \frac{b^2 y_1 y_3}{\beta} + \frac{c^2 z_1 z_3}{\gamma} + \frac{d^2 u_1 u_3}{\delta} = 0 \end{aligned}\right.$$

Enfin on a une troisième équation de condition

$$-\frac{w_2 w_3}{\varepsilon} + \frac{a^2 x_2 x_3}{\alpha} + \frac{b^2 y_2 y_3}{\beta} + \frac{c^2 z_2 z_3}{\gamma} + \frac{d^2 u_2 u_3}{\delta} = 0,$$

qui, jointe aux deux précédentes, exprime que le triangle en question est conjugué relativement au cône. Il faut montrer que ces trois équations sont identiques lorsqu'on remplace les x, y, z, u par leurs valeurs en fonction des λ fournis par l'équation (5).

Retranchons membre à membre les équations (6), d'abord les deux premières, et remarquons que, x, y, z n'entrant dans ces équations que par les rapports $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\ldots$, on peut supposer $w = 1$ pour simplifier l'écriture; il vient

$$\frac{a^2}{\alpha} x_1 (x_2 - x_3) + \frac{b^2}{\beta} y_1 (y_2 - y_3) + \frac{c^2}{\gamma} z_1 (z_2 - z_3) + \frac{d_2}{\delta} u_1 (u_2 - u_3) = 0.$$

Remplaçons $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ par leurs valeurs en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on trouve que le premier terme devient, en posant

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad S_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad S_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

$$\frac{\alpha A a^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{a^3\varepsilon^3 - A a^2\varepsilon^2 S_1 + A^2 a\varepsilon S_2 - A^3 S_3}.$$

Par une substitution pareille, le deuxième terme devient

$$\frac{\beta B b^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{b^3\varepsilon^3 - B b^2\varepsilon^2 S_1 + B^2 b\varepsilon S_2 - B^3 S_3}, \quad \ldots;$$

de sorte que l'équation prend la forme suivante

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha a^2 A}{a^3\varepsilon^3 - A a^2\varepsilon^2 S_1 + A^2 a\varepsilon S_2 - A^3 S_3} \\ &+ \frac{\beta b^2 B}{b^3\varepsilon^3 - B b^2\varepsilon^2 S_1 + B^2 b\varepsilon S_2 - B^3 S_3} \\ &+ \frac{\gamma c^2 C}{c^3\varepsilon^3 - C c^2\varepsilon^2 S_1 + C^2 c\varepsilon S_2 - C^3 S_3} \\ &+ \frac{\delta d^2 D}{d^3\varepsilon^3 - D d^2\varepsilon^2 S_1 + D^2 d\varepsilon S_2 - D^3 S_3} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous retranchons membre à membre la première et la troisième, puis la deuxième et la troisième des équations (6), et si nous remplaçons les x, y, z, u par les λ, nous retomberons sur deux équations identiques à la précédente; donc il suffit de vérifier que (7) est une identité.

L'équation (5) donne

$$\begin{aligned} ABCD.S_1 &= ABC\,d(\alpha+\beta+\gamma) + ABD\,c(\alpha+\beta+\delta) + \ldots, \\ ABCD.S_2 &= \varepsilon[AB\,cd(\alpha+\beta) + AC\,bd(\alpha+\gamma) + \ldots], \\ ABCD.S_3 &= \varepsilon^2(A\,bdc\alpha + B\,acd\beta + \ldots). \end{aligned}$$

Effectuons les substitutions des S_1, S_2, S_3 dans le premier terme de (7); il vient, toutes réductions faites,

$$\frac{a^2}{(aB - bA)(aC - cA)(aD - dA)}.$$

On aura des expressions analogues pour les autres termes, et (7) devient

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{(aB-bA)(aC-cA)(aD-dA)}\\&+\frac{b^2}{(bC-cB)(bD-dB)(bA-aB)}\\&+\frac{c^2}{(cD-dC)(cA-aC)(cB-bC)}\\&+\frac{d^2}{(dA-aD)(dB-bD)(dC-cD)}=0,\end{aligned}$$

ou bien, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned}&a^2(bC-cB)(bD-dB)(cD-dC)\\&+b^2(cA-aC)(aD-dA)(cD-dC)\\&+c^2(aB-bA)(aD-dA)(bD-dB)\\&+d^2(bA-aB)(aC-cA)(bC-cB)=0.\end{aligned}$$

On vérifie facilement que c'est une identité; d'où résulte la démonstration du théorème.

Maintenant considérons, sur une des surfaces U, la courbe parabolique d'ordre 2ε et la développable circonscrite à cette surface suivant la courbe parabolique qui représente, comme on sait, l'arête de rebroussement de cette développable.

Dans chacune des surfaces réciproques de U, on aura une courbe de rebroussement et une développable [1] circonscrite à la surface suivant cette ligne de rebroussement, lesquelles correspondront, en vertu du principe de dualité, à la développable osculatrice et à la courbe parabolique précédentes; d'où :

Théorème. — *Les surfaces réciproques des surfaces* U *forment un système triple, c'est-à-dire qu'il en passera trois par un point quelconque de l'espace; chacune de*

---

[1] *Voir* Salmon, *Geometry of three dimensions*, p. 526.

ces surfaces aura une ligne de rebroussement, la développable circonscrite à la surface suivant cette ligne de rebroussement sera de classe 2ε, *et elle sera circonscrite à une conique imaginaire transformée du cône* (4) *qui représente le lieu des courbes paraboliques dans les premières surfaces.*

Aux trois surfaces U qui touchent un plan quelconque correspondent trois surfaces réciproques passant par un point donné, et aux trois points de contact, les trois plans tangents aux trois surfaces menées par le point donné. Et, comme le triangle formé par les trois premiers points est conjugué relativement au cône (4), les trois plans tangents aux surfaces réciproques qui passent par un point donné sont conjugués relativement à la conique imaginaire C qui est la transformée du cône.

Si, en particulier, cette conique C devient le cercle imaginaire de l'infini, on aura :

THÉORÈME. — *Les surfaces réciproques de* U *constituent, dans le cas où la conique* C *devient le cercle imaginaire de l'infini, un système triple orthogonal, et, d'après le théorème de Dupin, chacune d'elles est coupée par les deux autres suivant ses lignes de courbure.*

Remarque. — Les surfaces de ce système triple n'ont pas d'enveloppe. En effet, pour que deux des trois plans tangents coïncident, il faut que deux sommets du triangle conjugué dans les premières surfaces U soient sur le cône imaginaire et, par suite, les deux plans tangents coïncidents dans les surfaces réciproques sont tangents à la développable circonscrite à la surface suivant la ligne de rebroussement imaginaire.

On a ici un exemple remarquable d'un système triple de surfaces, orthogonales dans un cas particulier, et qui n'ont pas d'enveloppe, qui, par conséquent, ne sont pas homofocales. La méthode générale qui sert à trouver l'enveloppe donnerait ici le lieu des courbes de rebroussement des surfaces du système. Cette remarque ne me paraît pas avoir été faite jusqu'à ce jour.

C'est ainsi que dans le plan un système de courbes orthogonales n'admet pas d'enveloppe en général, autrement dit un système de courbes orthogonales ne constitue pas généralement un système homofocal. Le lieu des points où les deux tangentes aux deux courbes qui passent par ces points coïncident est, en général, un lieu de points singuliers [1].

Inversement on peut avoir dans le plan des courbes homofocales qui ne sont pas orthogonales. Nous en avons donné un exemple dans les courbes représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda f - a} + \frac{y^2}{\lambda f - b} = 1,$$

où f représente une fonction quelconque de x et de y, a et b des constantes et λ un paramètre arbitraire. Ces courbes sont, quelle que soit la fonction f, homofocales aux coniques $\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} = 1$; mais, pour qu'elles soient orthogonales, il faut que la fonction f satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles qu'il est aisé d'établir. (*Voir* même Recueil, 2^e^ série, t. XX, p. 406.)

De même, si l'on considère les surfaces du système triple

$$\frac{x^2}{\lambda f - a} + \frac{y^2}{\lambda f - b} - \frac{z^2}{\lambda f - c} = 1,$$

(1) Darboux, *Comptes rendus*, t. LXXI, p. 267; *Étude géométrique et analytique d'une famille de courbes*, thèse par l'auteur.

où f représente une fonction quelconque de x, y, z, toutes ces surfaces sont homofocales; elles sont inscrites dans la même développable focale, quelle que soit la forme de la fonction f, mais elles ne sont pas orthogonales.

Pour qu'elles soient orthogonales, il faudrait que la fonction f satisfît à trois équations aux dérivées partielles du premier ordre que l'on trouve aisément en exprimant les conditions d'orthogonalité. Ce calcul nous a conduit à cette solution négative, à savoir que les trois équations n'avaient pas de solution commune, que, par conséquent, le système triple en question n'était pas, sauf le cas des surfaces quadratiques, un système triple orthogonal.

Equation tangentielle des surfaces U.

Si l'on se reporte aux relations entre les coordonnées x, y, z, u et le paramètre λ, on en tire

$$\frac{x}{w} = \frac{\alpha}{a\varepsilon - \lambda A}, \quad \frac{y}{w} = \frac{\beta}{b\varepsilon - \lambda B}, \quad \frac{z}{w} = \frac{\gamma}{c\varepsilon - \lambda C}, \quad \ldots;$$

remplaçant dans l'équation générale des surfaces U, il vient

$$\left(\lambda - \frac{a\varepsilon}{A}\right)^{\alpha}\left(\lambda - \frac{b\varepsilon}{B}\right)^{\beta}\left(\lambda - \frac{c\varepsilon}{C}\right)^{\gamma}\left(\lambda - \frac{d\varepsilon}{D}\right)^{\delta} + \frac{(-1)^{\varepsilon}}{K}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{B}\right)^{\beta}\left(\frac{\gamma}{C}\right)^{\delta}\left(\frac{\delta}{D}\right)^{\gamma} = 0;$$

d'ailleurs λ doit satisfaire à l'équation (4) ou (4 *bis*)

$$\frac{\alpha}{\lambda - \frac{a\varepsilon}{A}} + \frac{\beta}{\lambda - \frac{b\varepsilon}{B}} + \frac{\gamma}{\lambda - \frac{c\varepsilon}{C}} - \frac{\delta}{\lambda - \frac{d\varepsilon}{D}} = 0.$$

On obtiendra donc l'équation en coordonnées tangentielles A, B, C, D, en éliminant le paramètre λ entre ces deux équations.

On voit, à l'inspection de ces équations, que le résultat de cette élimination n'est autre chose que le discriminant de la première équation. On aura une équation de degré 3ε en A, B, ... et du troisième degré en K. Donc les surfaces réciproques de U forment bien un système triple d'ordre 3ε et de classe ε. Si l'on considère A, B, C, D comme des coordonnées ponctuelles, l'équation résultant de l'élimination de λ représentera en coordonnées ponctuelles les surfaces réciproques de U relativement à la quadratique $x^2+y^2+z^2+u^2=0$ (¹).

Application au cas particulier où $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$, $\varepsilon=4$. — Les surfaces réciproques de U sont des surfaces de douzième ordre et de quatrième classe dont l'équation en A, B, C, D se présente sous une forme assez simple.

L'équation en λ devient, dans ce cas,

$$\lambda^4-4\left(\frac{a}{\mathrm{A}}+\frac{b}{\mathrm{B}}+\frac{c}{\mathrm{C}}+\frac{d}{\mathrm{D}}\right)\lambda^3+16\left(\frac{ab}{\mathrm{AB}}+\frac{ac}{\mathrm{AC}}+\ldots\right)\lambda^2$$
$$-64\left(\frac{abc}{\mathrm{ABC}}+\frac{acd}{\mathrm{ACD}}+\ldots\right)\lambda+\frac{1}{\mathrm{KABCD}}=0.$$

Or on sait (Salmon, *Higher Algebra*, p. 171) que le discriminant d'une équation du quatrième degré de la forme

$$a'\lambda^4+4b'\lambda^3-6c'\lambda^2+4d'\lambda+e'=0$$

est

$$(a'e'-4b'd'+3c'^2)^3$$
$$-27(a'c'e'+2b'c'd'-a'd'^2-e'b'^2-c'^3)^2=0.$$

Appliquant ce résultat à l'équation précédente, on aura,

(¹) M. Darboux a étudié des systèmes triples orthogonaux représentés par une équation analogue à la précédente dans son savant Mémoire sur les coordonnées curvilignes (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 1878).

après avoir simplifié et réduit,

$$\left[\frac{\mathrm{ABCD}}{\mathrm{K}} - 64(a\mathrm{BCD} + b\mathrm{ACD} + c\mathrm{ABD} + \ldots)\right.$$
$$\left. + (abc\mathrm{D} + acd\mathrm{B} + \ldots) + \frac{64}{3}(ab\mathrm{CD} + \ldots)^2\right]^3$$
$$- 27\left[\frac{8}{3\mathrm{K}}\mathrm{ABCD}(ab\mathrm{CD} + \ldots)\right.$$
$$+ \frac{16^2}{3}(a\mathrm{BCD} + \ldots)(ab\mathrm{CD} + \ldots)(abc\mathrm{D} + \ldots)$$
$$- 16^2\mathrm{ABCD}(abc\mathrm{D} + \ldots)^2$$
$$\left. - \frac{1}{\mathrm{K}}(a\mathrm{BCD} + \ldots)^2 - \frac{8^3}{27}(ab\mathrm{CD} + ac\mathrm{BD} + \ldots)^3\right] = 0.$$

C'est une équation du douzième ordre en A, B, C, D.