

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 153-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__153_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Permettez-moi quelques mots de réponse à la critique de M. le Dr Peano ⁽¹⁾, à laquelle M. Jordan n'aurait eu aucune peine à répondre lui-même, s'il n'eût probablement aperçu derrière quelque difficulté plus subtile.

J'observe d'abord qu'il n'est pas nécessaire que les ε tendent vers zéro pour *tout* mode de division de l'intervalle h en parties indéfiniment décroissantes δ ; il suffit que cela ait lieu pour *un* mode de division, et le théorème dont il s'agit sera démontré. M. Peano suppose, dans sa critique et dans son exemple, que les quantités a_r ne sont pas des valeurs *fixes* de la variable x . Or, rien n'empêche de concevoir que l'on fasse décroître les intervalles entre les valeurs consécutives de x , tout en supposant celles-ci fixes, en intercalant entre elles de nouvelles valeurs de x qui resteront fixes à leur tour, entre celles-ci de nouvelles valeurs également fixes, et ainsi de suite indéfiniment ⁽²⁾. Les intervalles δ , toujours subdivisés, pourront décroître au-dessous de toute grandeur donnée, et chaque valeur intercalée x restant fixe, le rapport

$$\frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} = \varphi(x, \delta)$$

ne pourra tendre, pour chacune d'elles, vers une limite différente de $f'(x)$. A moins donc que, pour *tout* mode

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales*, janvier 1884.

⁽²⁾ C'est bien là, à en juger par les termes, la pensée de M. Jordan.

de division de l'intervalle h en parties indéfiniment décroissantes δ , la différence

$$\varphi(x, \delta) - f'(x)$$

ne reste supérieure à une limite fixe pour un nombre fini ou indéfiniment croissant de valeurs de x , quand tous les intervalles δ tendent simultanément vers zéro, la démonstration pourra toujours se faire de la même manière.

Ce n'est pas le cas, on le voit sans peine, pour la fonction

$$x^2 \sin \frac{1}{x};$$

aussi le théorème contesté lui est-il parfaitement applicable. En faisant $a_1 = \frac{1}{2n\pi}$ et $a_2 = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ et faisant par conséquent tendre simultanément a_1 et a_2 vers zéro, M. Peano introduit arbitrairement une condition inutile. La démonstration ne peut se faire *par cette voie*, voilà tout.

M. Peano croit qu'il est facile de démontrer la formule

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \theta h),$$

sans supposer la continuité de la dérivée. M. Jordan demande, non sans malice, à voir cette démonstration, laquelle est impossible, puisque le théorème est inexact.

Supposons une fonction $f(x)$ égale à $\sqrt{2px}$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, et à $\sqrt{2p(2a-x)}$ depuis $x=a$ jusqu'à $x=2a$. Cette fonction est continue, mais sa dérivée cesse de l'être pour $x=a$, où elle passe de la valeur $\sqrt{\frac{p}{2a}}$ à la valeur $-\sqrt{\frac{p}{2a}}$.

On a évidemment, h étant $< a$,

$$f(a+h) - f(a-h) = \sqrt{2p(a-h)} - \sqrt{2p(a-h)} = 0:$$

or il n'existe entre $a - h$ et $a + h$ aucune valeur de x pour laquelle $f'(x)$ se réduise à zéro.

Notons que le théorème de M. Jordan reste vrai, au contraire, dans ce cas-ci, car zéro est compris entre les valeurs

$$\sqrt{\frac{p}{2(a-h)}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{p}{2(a-h)}}$$

de $f'(x)$ qui correspondent à $a - h$ et à $a + h$. Et cependant M. Peano pourrait ici renouveler son objection, puisque $f(a + \delta) - f(a - \delta)$ n'a pas pour limite $f'(a)$ lorsque δ tend vers zéro.

PH. GILBERT,

Professeur à l'Université de Louvain.