

H. FAURE

Sur la question 1028

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 144-146

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__144_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA QUESTION 1028;

PAR M. H. FAURE,

Chef d'escadrons d'artillerie en retraite.

Cette question a déjà été traitée plusieurs fois dans les *Nouvelles Annales*, en dernier lieu par M. Doucet (2^e série, t. XX, p. 321), qui en a fait l'historique.

On circonscrit à une conique donnée un triangle ayant pour hauteurs les droites qui joignent les sommets aux points de contact avec les côtés opposés : lieu des sommets du triangle, lieu des points de concours des hauteurs.

Soient abc l'un de ces triangles, A, B, C ses angles, a, b, c les longueurs de ses côtés. Prenant ce triangle pour

triangle de référence,

$$S = \cos^2 A \alpha^2 + \cos^2 B \beta^2 + \cos^2 C \gamma^2 \\ - 2 \cos A \cos B \cos C \left(\frac{\alpha}{\cos A} + \frac{\beta}{\cos B} + \frac{\gamma}{\cos C} \right) = 0$$

sera l'équation de la conique donnée, car il est aisé de voir que S touche le triangle abc aux pieds de ses hauteurs.

Considérons, d'autre part, la conique

$$S' = \cos A \beta \gamma + \cos B \gamma \alpha + \cos C \alpha \beta,$$

circonscrite au triangle abc . Je dis que cette conique est fixe, quel que soit le triangle abc , satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

La différence $S - S'$ de nos deux équations peut se mettre sous la forme

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma) \left(\frac{\cos^2 A}{a} \alpha + \frac{\cos^2 B}{b} \beta + \frac{\cos^2 C}{c} \gamma \right) \\ - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} (a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta);$$

d'où il suit que l'équation $S - S' = 0$ représente le lieu des sommets des angles droits circonscrits à S .

Concluons de là que, si nous considérons un triangle *quelconque* abc circonscrit à la conique S , on pourra circonscrire au triangle abc une conique S' qui passera par quatre points déterminés de S , ce qui exige que S' soit une conique fixe.

L'équation $S' = 0$ représente donc le lieu des sommets du triangle.

Si l'on veut avoir le lieu des points de concours des hauteurs, il suffit de remarquer que la conique $S + \lambda S' = 0$ passera par le point de concours $\alpha \cos A = \beta \cos B = \gamma \cos C$ des hauteurs du triangle de référence, pour la valeur

$$\lambda = \frac{3 \cos A \cos B \cos C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C};$$

donc, pour cette valeur de λ , $S + \lambda S'$ représentera le lieu du point de concours des hauteurs.

Nota. — Si l'on désigne par Δ , Δ' , θ , θ' les invariants du système des coniques S et S' , on trouve

$$\Delta = -4 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C,$$

$$\Delta' = 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$\theta = 4 \cos A \cos B \cos C (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C),$$

$$\theta' = -(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)^2;$$

de là on peut conclure que, pour tous les triangles abc circonscrits à S et dont les hauteurs passent par les points de contact de la conique avec les côtés opposés, les fonctions $\cos A \cos B \cos C$ et $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ restent constantes.