

H. FAURE

Emploi, dans la géométrie trilinéaire, des coordonnées des points circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 140-144

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__140_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**EMPLOI, DANS LA GÉOMÉTRIE TRILINÉAIRE, DES COORDONNÉES
DES POINTS CIRCULAIRES ;**

PAR M. H. FAURE.

I. Soient a, b, c les côtés du triangle de référence, A, B, C ses angles, S sa surface, R le rayon du cercle qui lui est circonscrit.

Considérons les deux points ω_1 et ω_2 qui ont pour coordonnées

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -1, & \alpha_2 &= -1, \\ \beta_1 &= \cos C + \sin C \sqrt{-1}, & \beta_2 &= \cos C - \sin C \sqrt{-1}, \\ \gamma_1 &= \cos B - \sin B \sqrt{-1}; & \gamma_2 &= \cos B + \sin B \sqrt{-1}.\end{aligned}$$

On vérifie aisément que : 1° satisfaisant à la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

ces points sont à l'infini; 2° satisfaisant à la relation

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0,$$

ces points sont sur un cercle. Les points ω_1, ω_2 ainsi définis par leurs coordonnées sont donc les points situés à l'infini sur un cercle.

II. A l'aide de ces valeurs, la fonction X

$$\begin{aligned}X &= ll' + mm' + nn' - 2 \cos A (mn' + nm') \\ &\quad - 2 \cos B (nl' + ln') - 2 \cos C (lm' + ml')\end{aligned}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{2}[(l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)(l'\alpha_2 + m'\beta_2 + n'\gamma_2) \\ &\quad + (l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2)(l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1)];\end{aligned}$$

la vérification est facile, en observant que

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2 &= \beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2 = 1, \\ \gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 &= -2 \cos A, & \alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2 &= -2 \cos B, \\ \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 &= -2 \cos C.\end{aligned}$$

En particulier, la fonction Z

$$Z = l^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos A - 2nl \cos B - 2lm \cos C$$

sera égale au produit

$$(l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)(l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2).$$

III. Cela posé, soit $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ l'équation

d'une droite. Convenons de représenter par la notation $D(\alpha\beta\gamma)$ son premier membre et de même par $D'(\alpha\beta\gamma)$ la fonction linéaire $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma$.

1° On sait que si, λ, μ, ν sont les distances des sommets du triangle de référence à une droite quelconque,

$$4S^2 = a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2 - 2bc\mu\nu\cos A - 2ca\nu\lambda\cos B - 2\lambda\mu\cos C;$$

nous pouvons donc écrire

$$4S^2 = (a\lambda\alpha_1 + b\mu\beta_1 + c\nu\gamma_1)(a\lambda\alpha_2 + b\mu\beta_2 + c\nu\gamma_2).$$

2° Distance d'un point (α, β, γ) à la droite

$$D(\alpha\beta\gamma) = 0.$$

Cette distance δ pourra s'écrire sous la forme

$$\delta = \frac{D(\alpha\beta\gamma)}{\sqrt{D(\alpha_1\beta_1\gamma_1)D(\alpha_2\beta_2\gamma_2)}};$$

car on sait que

$$\delta = \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C}}.$$

Lorsque la droite D est déterminée par deux de ses points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, on a

$$\delta = \frac{|\alpha \alpha' \alpha''|}{\sqrt{|\alpha_1 \alpha' \alpha''| |\alpha_2 \alpha' \alpha''|}},$$

en convenant de représenter par $|\alpha \alpha' \alpha''|$ le déterminant des neuf quantités $\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta''; \gamma, \gamma', \gamma''$ et de même pour les autres.

Si, dans l'expression de δ , on suppose que le point (α, β, γ) coïncide successivement avec chacun des points circulaires, et que l'on désigne par δ_1 et δ_2 les distances des points ω_1 et ω_2 à une droite quelconque, on trouve

$$\delta_1 \cdot \delta_2 = 1.$$

3° *Angle de deux droites.* — On sait que le cosinus de l'angle θ des deux droites D, D' est donné par la relation

$$\cos \theta = \frac{X}{\sqrt{ZZ'}}.$$

Z' étant ce que devient Z lorsqu'on ajoute un accent aux lettres l, m, n . Nous avons, par conséquent, en introduisant les coordonnées des points circulaires,

$$2 \cos \theta = \frac{D(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1) D'(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) + D(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) D'(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)}{\sqrt{D(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1) D(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) D'(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1) D'(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2)}}.$$

Si les droites sont déterminées par les coordonnées α, β, γ de leur point d'intersection et par les coordonnées $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ d'un point pris sur chacune d'elles, on a aussi

$$2 \cos \theta = \frac{|\alpha_1 \alpha \alpha'| |\alpha_2 \alpha \alpha''| + |\alpha_1 \alpha \alpha''| |\alpha_2 \alpha \alpha'|}{\sqrt{|\alpha_1 \alpha \alpha'| |\alpha_2 \alpha \alpha''| |\alpha_1 \alpha \alpha''| |\alpha_2 \alpha \alpha'|}}.$$

Si l'angle θ et les points α', α'' sont donnés, cette relation donne immédiatement l'équation du cercle passant par deux points et capable d'un angle donné.

4° *Distance de deux points m, m' donnés par leurs coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')$.* — Si, pour abrégér, on pose

$$L = \beta\gamma' - \gamma\beta', \quad M = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad N = \alpha\beta' - \beta\alpha',$$

on a la relation

$$\overline{mm'}^2 = \frac{R^2}{S^2} (L^2 + M^2 + N^2 - 2MN \cos A - 2NL \cos B - 2MN \cos C).$$

Nous pouvons donc écrire, à l'aide des coordonnées des points circulaires,

$$\overline{mm'}^2 = \frac{R^2}{S^2} (L\alpha_1 + M\beta_1 + N\gamma_1)(L\alpha_2 + M\beta_2 + N\gamma_2),$$

ou bien

$$\overline{mm'}^2 = \frac{R^2}{S^2} |\alpha_1 \alpha \alpha'| |\alpha_2 \alpha \alpha'|.$$

Remarque. — Si l'on désigne maintenant par Σ l'aire d'un triangle dont les coordonnées des sommets sont (α, β, γ) , $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, on a

$$2\Sigma = \frac{R}{S} |\alpha' \beta \gamma|.$$

Si donc nous remplaçons dans la valeur de $\overline{mm'}^2$ les déterminants par leurs valeurs respectives

$$\frac{2S}{R} \omega_1 mm', \quad \frac{2S}{R} \omega_2 mm',$$

on trouvera

$$\overline{mm'}^2 = 4 \omega_1 mm' \cdot \omega_2 mm'.$$