Nouvelles annales de mathématiques

A. Legoux

Généralisation d'un théorème relatif aux points d'inflexion des cubiques planes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 77-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__77_0>

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME RELATIF AUX POINTS D'INFLEXION DES CUBIQUES PLANES;

PAR M. A. LEGOUX.

Soit

$$U = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} + k u^{\delta} = 0 \qquad (1)$$

une équation en coordonnées homogènes; x, y, z étant les trois côtés du triangle de référence, u un polynôme égal à $ax + by + cz$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, des nombres entiers tels que $\delta = \alpha + \beta + \gamma$; a, b, c des quantités données et k un paramètre variable.

Cette équation représente un système de cubiques lorsque l'on suppose $\alpha = \beta = \gamma = 1$ et $\delta = 3$. On sait que les points d'inflexion de ces cubiques sont distribués trois par trois sur des droites, savoir les trois points réels sur la droite u et les deux autres séries de trois points sur deux droites imaginaires.

Dans le cas général on a des courbes d'ordre δ. Les trois côtés du triangle de référence sont tangents à toutes les courbes du système aux points où ces côtés rencontrent la droite u. L'ordre de contact est égal à $\delta - 1$, de sorte que, si δ est pair, la courbe est située du même côté de la tangente dans le voisinage du point de contact et, si δ est impair, la courbe coupe la tangente; nous aurons dans ce dernier cas un point d'inflexion d'ordre supérieur.

Nous démontrerons que les courbes proposées ont des points d'inflexion imaginaires qui sont distribués sur deux droites imaginaires conjuguées indépendantes de la valeur de k. Si le degré est pair, il n'y a pas d'autres inflexions; mais, si le degré est impair, il y a en outre les trois points d'inflexion réels situés sur la droite u, de sorte que, dans ce dernier cas, il existe un triangle inflexionnel comme dans les cubiques.

On sait que les points d'inflexion sont situés sur la hessienne dont on peut écrire l'équation sous la forme

$$a'b'c' + 2f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2 - c'h'^2 = 0,$$

en posant

$$a' = \frac{d^2 U}{dx^2}, \quad b' = \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad c' = \frac{d^2 U}{dz^2},$$
$$f' = \frac{d^2 U}{dy\,dz}, \quad g' = \frac{d^2 U}{dz\,dx}, \quad h' = \frac{d^2 U}{dx\,dy}.$$

Or on a

$$\frac{dU}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma + k\delta a u^{\delta-1},$$

ou, en tenant compte de l'équation (1),

$$\frac{dU}{dx} = k u^{\delta-1}\left(\delta a - \frac{\alpha u}{x}\right),$$
$$\frac{dU}{dy} = k u^{\delta-1}\left(\delta b - \frac{\beta u}{y}\right),$$
$$\frac{dU}{dz} = k u^{\delta-1}\left(\delta c - \frac{\gamma u}{z}\right),$$

$$a' = \frac{d^2 U}{dx^2} = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} y^\beta z^\gamma + k\delta(\delta - 1)a^2 u^{\delta-2},$$
$$b' = \beta(\beta - 1)x^\alpha y^{\beta-2} z^\gamma + k\delta(\delta - 1)b^2 u^{\delta-2},$$
$$c' = \gamma(\gamma - 1)x^\alpha y^\beta z^{\gamma-2} + k\delta(\delta - 1)c^2 u^{\delta-2},$$
$$f' = \beta\gamma x^\alpha y^{\beta-1} z^{\gamma-1} + k\delta(\delta - 1)bc\, u^{\delta-2},$$
$$g' = \gamma\alpha x^{\alpha-1} y^\beta z^{\gamma-1} + k\delta(\delta - 1)ca\, u^{\delta-2},$$
$$h' = \alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^\gamma + k\delta(\delta - 1)ab\, u^{\delta-2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la hessienne, on trouve que les termes en k^3 et en k^2 disparaissent et il reste, toutes réductions faites,

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha\beta\gamma\, x^{3\alpha-2} y^{3\beta-2} z^{3\gamma-2}\\
&\quad + k\delta x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2} z^{2\gamma-2} u^{\delta-2}\\
&\quad \times\left[\begin{array}{l}\alpha\beta\gamma(2bcyz+2cazx+2abxy)\\ -\beta\gamma(\beta+\gamma-1)a^2x^2-\gamma\alpha(\gamma+\alpha-1)b^2y^2\\ -\alpha\beta(\alpha+\beta-1)c^2z^2\end{array}\right]=0.
\end{aligned}\right.
$$

On sait que la hessienne passe aussi par les points singuliers des courbes du système. D'ailleurs ces points sont déterminés par les trois équations

$$\frac{dU}{dx}=0,\quad \frac{dU}{dy}=0,\quad \frac{dU}{dz}=0,$$

et l'on voit facilement que les solutions communes à ces équations sont $x=0$, $u=0$; $y=0$, $u=0$; $z=0$, $u=0$. Donc, en dehors de ces trois points situés sur la droite u et par lesquels passent toutes les courbes du système, tous les points d'intersection de l'une des courbes et de sa hessienne seront bien des points d'inflexion.

L'équation (2) se décompose dans les deux suivantes :

$$x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2} z^{2\gamma-2}=0,$$

ce qui donne les trois côtés du triangle de référence, résultat évident, puisque ce sont des courbes singulières infiniment aplaties qu'on obtient en faisant $k=0$ et dont chaque point est un point d'inflexion; et

$$
\begin{aligned}
&\alpha\beta\gamma\, x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}\\
&\quad + k\delta u^{\delta-2}\\
&\quad \times\left[\begin{array}{l}2\alpha\beta\gamma(bcyz+cazx+abxy)\\ \quad -\beta\gamma(\beta+\gamma-1)a^2x^2\\ \quad -\gamma\alpha(\gamma+\alpha-1)b^2y^2-\alpha\beta(\alpha+\beta-1)c^2z^2\end{array}\right]=0.
\end{aligned}
$$

On aura le lieu des points d'inflexion de toutes les courbes du système en éliminant k entre cette équation et l'équation (1), ce qui donne

$$(3)\quad \begin{cases} -\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}a^2x^2-\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}b^2y^2-\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}c^2z^2 \\ \qquad +2bcyz+2cazx+2abxy=0, \end{cases}$$

ou bien

$$\left[\sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}}\,ax-(by+cz)\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}\right]^2 + \frac{\delta}{\beta+\gamma}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,cz-\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\,by\right)^2=0.$$

Sous cette dernière forme, on voit que le lieu des points d'inflexion se compose de deux droites imaginaires conjuguées.

Enveloppe des tangentes d'inflexion. — L'équation d'une tangente à une courbe du système en un point (x, y, z) peut s'écrire

$$\lambda X+\mu Y-\nu Z=0,$$

en posant

$$\lambda=\delta a-\frac{\alpha u}{x},\quad \mu=\delta b-\frac{\beta u}{y},\quad \nu=\delta c-\frac{\gamma u}{z}.$$

Cherchons la relation qui doit exister entre λ, μ, ν, pour que le point de contact soit situé sur une des droites représentées par l'équation (3). L'équation de l'une de ces droites peut s'écrire

$$A\,ax+B\,by+C\,cz=0;$$

mais on a, d'après ce qui précède,

$$ax=\frac{\alpha a u}{\delta a-\lambda},\quad by=\frac{\beta b u}{\delta b-\mu},\quad cz=\frac{\gamma c u}{\delta c-\nu};$$

en substituant, il vient

$$(4)\qquad \frac{A\alpha a}{\delta a-\lambda}+\frac{B\beta b}{\delta b-\mu}+\frac{C\gamma c}{\delta c-\nu}=0,$$

équation du second degré en λ, μ, ν.

En remplaçant ax, by, cz par leurs valeurs dans l'expression de u,

$$u = ax + by + cz,$$

on a

$$\frac{a\alpha}{\delta a - \lambda} + \frac{b\beta}{\delta b - \mu} + \frac{c\gamma}{\delta c - \nu} = 1; \tag{5}$$

l'équation de la tangente à la courbe peut s'écrire

$$(\delta a - \lambda)X + (\delta b - \mu)Y + (\delta c - \nu)Z = \delta(aX + bY + cZ). \tag{6}$$

En prenant pour paramètres variables les quantités

$$\frac{1}{\delta a - \lambda}, \quad \frac{1}{\delta b - \mu}, \quad \frac{1}{\delta c - \nu},$$

et en éliminant deux de ces paramètres entre les équations (4), (5) et (6), on trouve que l'équation finale est du troisième degré relativement au troisième paramètre. D'où l'on conclut que, par un point donné quelconque, on peut mener trois tangentes à la courbe enveloppe des tangentes d'inflexion : donc, en général, les tangentes aux points d'inflexion imaginaires situés sur les deux droites trouvées précédemment enveloppent deux courbes de troisième classe.

Remarque I. — Les courbes du système précédent sont telles qu'il en passe une seule par un point quelconque du plan et qu'il en existe deux tangentes à une droite donnée. Cette propriété est une conséquence immédiate de la forme de leur équation différentielle que l'on trouve sans difficulté et qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}(\alpha by - \beta ax)\,&z\,(y\,dx - x\,dy)\\ &+ (\beta cz - \gamma by)\,x\,(z\,dy - y\,dz)\\ &+ (\gamma ax - \alpha cz)\,y\,(x\,dz - z\,dx) = 0;\end{aligned}$$

ces courbes font donc partie du système (1, 2), d'après les notations de Chasles.

Remarque II. — Si l'on prend les transformées de ces courbes par le principe de dualité, on aura un système de courbes douées de points de rebroussement imaginaires et le lieu de ces points de rebroussement se composera de deux coniques. Ces courbes corrélatives feront partie du système (2, 1), c'est-à-dire qu'il en existera une seule tangente à une droite donnée et qu'il en passera deux par chaque point du plan.