

E. CATALAN

**Sur quelques développements de
 $\sin nx$ et de $\cos nx$**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 529-535

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_529_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS DE $\sin nx$ ET DE $\cos nx$;PAR M. E. CATALAN ⁽¹⁾.

Les valeurs de $\sin nx$ et de $\cos nx$, ordonnées suivant les puissances de $\sin x$ ou de $\cos x$, sont connues depuis longtemps. Elles ont été démontrées par Lagrange et Cauchy, puis par MM. Bachr, Villarceau et Ronkar ⁽²⁾. Mais personne, je le crois, n'a remarqué la notable simplification que subissent les formules, quand on y introduit $2 \sin x$, $2 \cos x$ au lieu de $\sin x$, $\cos x$. Afin d'épargner aux lecteurs des *Nouvelles Annales* l'ennui de consulter divers Ouvrages peu répandus, je reproduis, en la modifiant un peu, la remarquable méthode employée par M. Yvon Villarceau ⁽³⁾.

I. — DÉVELOPPEMENTS DE $\sin nx$.

1. Le calcul direct de $\sin 2x$, $\sin 4x$, $\sin 6x$, ..., conduit à supposer

$$(1) \quad (-1)^{\frac{n}{2}-1} \sin nx = \cos x \sum A_i (2 \sin x)^{n-i}$$

(n pair, i impair).

Prenant les dérivées des deux membres, on trouve

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^{\frac{n}{2}-1} n \cos nx &= \sum 2(n-i) A_i (2 \sin x)^{n-i-1} \\ &- \sum \frac{1}{2} (n-i+1) A_i (2 \sin x)^{n-i+1}; \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Cette Note ne fait pas double emploi avec celle qui a paru dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 100.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 101 et 124.

⁽³⁾ *Comptes rendus*, t. LXXXII.

puis, en prenant de nouveau les dérivées,

$$(3) \left\{ \begin{aligned} -(-1)^{\frac{n}{2}-1} n^2 \sin nx &= \cos x \sum 4(n-i)(n-i-1) A_i (2 \sin x)^{n-i-2} \\ &\quad - \cos x \sum (n-i+i)^2 A_i (2 \sin x)^{n-i}. \end{aligned} \right.$$

La combinaison des égalités (1), (3) donne, après suppression du facteur $\cos x$,

$$(4) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum (2n-i+1)(i-1) A_i (2 \sin x)^{n-i} \\ &\quad + \sum 4(n-i)(n-i-1) A_i (2 \sin x)^{n-i-2}. \end{aligned} \right.$$

Dans le second membre, le coefficient de $(2 \sin x)^{n-i}$ est

$$(2n-i+1)(i-1) A_i + 4(n-i+2)(n-i-1) A_{i-2}.$$

Dans le premier membre, ce coefficient est nul; donc

$$(5) \quad A_i = - \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{\left(n-\frac{i-1}{2}\right) \left(\frac{i-1}{2}\right)} A_{i-2}.$$

On reconnaît aisément que $A_i = 1$ (1). Par suite,

$$\begin{aligned} A_3 &= - \frac{n-2}{1}, \\ A_5 &= + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}, \\ A_7 &= - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

(1) En effet, de la formule de Moivre, on tire

$$\frac{\sin nx}{\cos x} = \frac{n}{1} \cos^{n-2} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-4} x \sin^3 x + \dots,$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\sin nx}{\cos x} &= \frac{n}{1} (1 - \sin^2 x)^{\frac{n}{2}-1} \sin x \\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} (1 - \sin^2 x)^{\frac{n}{2}} \sin^3 x + \dots \end{aligned}$$

Or, dans le second membre, le coefficient de $\sin^{n-1} x$ est, en valeur absolue,

$$C_{n,1} + C_{n,3} + C_{n,5} + \dots = 2^{n-1}.$$

et, en général,

$$(6) \quad A_i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}}.$$

La première des formules cherchées est donc

$$(A) \quad (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{\sin nx}{\cos x} = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}} (2 \sin x)^{n-i}$$

(n pair, i impair).

2. Pour former la seconde, il suffit de remplacer x par $\frac{\pi}{2} - x$. On obtient ainsi

$$(B) \quad \frac{\sin nx}{\sin x} = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}} (2 \cos x)^{n-i}$$

(n pair, i impair) (1).

II. — DÉVELOPPEMENTS DE $\cos nx$.

3. Si l'on pose

$$(7) \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos nx = \cos x \sum B_i (2 \sin x)^{n-i}$$

(n pair, i impair), il est clair, sans nouveaux calculs, que la relation entre B_i et B_{i-2} sera, sauf le changement de lettre, la formule (5), savoir

$$(8) \quad B_i = - \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{\left(n - \frac{i-1}{2}\right) \left(\frac{i-1}{2}\right)} B_{i-2}.$$

(1) 1° Si $n = 4\mu$, le changement indiqué donne

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} \sin nx = -\sin 4\mu \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(-nx) = \sin nx.$$

2° Si $n = 4\mu + 2$:

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} \sin nx = \sin(4\mu + 2) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(\pi - nx) = \sin nx.$$

Et comme $B_i = 1 = A_i$,

$$(9) \quad B_i = A_i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}}.$$

Le développement demandé est donc

$$(C) \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos nx}{\cos x} = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}} (2 \sin x)^{n-i}$$

(n impair, i impair).

4. Le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$ donne ensuite

$$(D) \quad \frac{\sin nx}{\sin x} = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}} (2 \cos x)^{n-i}$$

(n impair, i impair).

5. Lorsque n est pair, $\cos nx$ est une fonction paire de $\cos x$. On trouve, par un calcul semblable aux précédents,

$$(E) \quad \cos nx = \sum (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{n}{2n-k} C_{n-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}} (2 \cos x)^{n-k}$$

(n pair, k pair).

III. — APPLICATIONS.

6. Si l'on suppose, successivement, $n = 4, 5, 6, 7$, on obtient les valeurs connues ⁽¹⁾

$$-\frac{\sin 4x}{\cos x} = (2 \sin x)^3 - 2(2 \sin x),$$

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} = (2 \cos x)^3 - 2(2 \cos x),$$

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} = (2 \sin x)^3 - 3(2 \sin x)^2 + 1,$$

(1) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 103 et 104.
On a imprimé, fautivement, $17 \cos^2 x$, au lieu de $12 \cos^2 x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 5x}{\sin x} &= (2 \cos x)^4 - 3(2 \cos x)^2 + 1, \\
\frac{\sin 6x}{\cos x} &= (2 \sin x)^5 - 4(2 \sin x)^3 + 3(2 \sin x), \\
\frac{\sin 6x}{\sin x} &= (2 \cos x)^5 - 4(2 \cos x)^3 + 3(2 \cos x), \\
-\frac{\cos 7x}{\cos x} &= (2 \sin x)^6 - 5(2 \sin x)^4 + 6(2 \sin x)^2 - 1, \\
-\frac{\sin 7x}{\sin x} &= (2 \cos x)^6 - 5(2 \cos x)^4 + 6(2 \cos x)^2 - 1, \\
\cos 4x &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1, \\
\cos 6x &= 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1.
\end{aligned}$$

IV. — REMARQUES.

7. La formule (D), développée, devient

$$\begin{aligned}
\frac{\sin nx}{\sin x} &= (2 \cos x)^{n-1} - C_{n-2,1}(2 \cos x)^{n-3} \\
&\quad + C_{n-3,2}(2 \cos x)^{n-5} - C_{n-4,3}(2 \cos x)^{n-7} + \dots
\end{aligned}$$

Quand on opère d'une manière un peu différente de celle qui vient d'être indiquée, on trouve (1)

$$\begin{aligned}
(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} &= (2 \sin x)^{n-1} - \frac{n}{1} (2 \sin x)^{n-3} + \frac{n(n-3)}{1.2} (2 \sin x)^{n-5} \\
&\quad - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} (2 \sin x)^{n-7} + \dots
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a cette identité, dans laquelle n est impair :

$$\begin{aligned}
&(2 \cos x)^{n-1} - \frac{n-2}{1} (2 \cos x)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} (2 \cos x)^{n-5} - \dots \\
\text{(F)} \quad &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[(2 \sin x)^{n-1} - \frac{n}{1} (2 \sin x)^{n-3} + \frac{n(n-3)}{1.2} (2 \sin x)^{n-5} \right. \\
&\quad \left. - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} (2 \sin x)^{n-7} - \dots \right].
\end{aligned}$$

(1) *Loc. cit.*

8. Dans la même relation (D), faisons tendre x vers zéro : la limite du premier membre est n . De là cette sommation, assez remarquable ⁽¹⁾ :

$$(G) \quad 2^{n-1} - 2^{n-3} C_{n-2,1} + 2^{n-5} C_{n-3,2} - 2^{n-7} C_{n-4,3} + \dots = n.$$

9. Si tous les termes sont pris positivement, le résultat est beaucoup plus compliqué : je trouve

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2^{n-1} + 2^{n-3} C_{n-2,1} + 2^{n-5} C_{n-3,2} + \dots \\ = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}. \end{array} \right.$$

10. Dans l'égalité (F), le dernier terme du premier membre est $(-1)^{\frac{n-1}{2}} (2 \cos x)^n$.

Par conséquent, si l'on fait $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$(I) \quad \frac{2^{n-1} - 1}{n} = 2^{n-3} - \frac{n-3}{2} 2^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3} 2^{n-7} - \dots$$

11. Supposons que n soit un nombre premier. Alors, en vertu du théorème de Fermat, le premier membre est un nombre entier. De plus, comme on le reconnaît sans peine ⁽²⁾, *tous les coefficients*, dans le second membre, *sont des nombres entiers*. La relation (I) donne donc, pour ainsi dire, une *décomposition, en parties entières, du nombre entier* $\frac{2^{n-1} - 1}{n}$.

12. Pour trouver une propriété plus générale, il suffit de recourir à la relation (E), en y faisant $x = \frac{\pi}{3}$.

(1) Elle n'exige pas que n soit *impair*.

(2) Je crois me rappeler que M. Stern a donné des formules analogues à celle-ci.

Elle se réduit à

$$\cos \frac{n\pi}{3} = \sum (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{n}{2n-k} G_{n-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}},$$

ou encore, à (1)

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{n-3}{2} - \frac{(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \\ \\ = 1 - \frac{1 - 2 \cos \frac{n\pi}{3}}{n}. \end{array} \right.$$

Si, par exemple, $n=8$, on a

$$\frac{5}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1 + \frac{2}{8}.$$