

L. KIEN

**Concours d'admission à l'École normale
en 1852 (Voir 1re série, t. XI, p. 324)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 511-515

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_511_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1852

(voir 1^{re} série, t. XI, p. 324);

PAR M. L. KIEN,

Élève du pensionnat Notre-Dame-du-Sacré-Cœur.

On donne une conique, ellipse, hyperbole ou parabole et deux axes fixes qui passent par un foyer et font entre eux un angle de grandeur déterminée. On fait rouler sur la conique une tangente, et par les points où cette droite rencontre dans chacune de ses positions les axes fixes on mène deux autres tangentes à la courbe; ces deux dernières tangentes se coupent en un point dont on demande le lieu géométrique.

Nous prenons le foyer F considéré pour origine, l'axe focal pour axe des x et la perpendiculaire à cet axe focal, en F, pour axe des y . L'équation de la conique est

$$x^2 + y^2 - (ex + p)^2 = 0.$$

Soient $y - mx = 0$ l'équation de l'axe fixe $\overline{FA}$, et $y - m'x = 0$ l'équation de l'axe fixe $\overline{FB}$.

L'équation de la tangente mobile $\overline{AB}$ est

$$x(\cos \varphi - e) + y \sin \varphi - p = 0 \quad (1).$$

L'équation générale des droites qui passent par A, intersection de $\overline{FA}$ et de la tangente $\overline{AB}$, est donc

$$x(\cos \varphi - e) + y \sin \varphi - p + \lambda(y - mx) = 0$$

ou

$$(k) \quad (\cos \varphi - e - m\lambda)x - y(\lambda + \sin \varphi) - p = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que cette équation représente une tangente à la conique. Pour cela, on peut l'identifier avec l'équation $x(\cos \varphi' - e) + y \sin \varphi' - p = 0$ d'une tangente quelconque, puis éliminer φ' entre les deux équations de condition obtenues : on obtient ainsi la condition cherchée, qui est

$$\lambda^2(1 + m^2) + 2(\sin \varphi - m \cos \varphi)\lambda = 0.$$

La solution $\lambda = 0$ correspond à $\overline{AB}$; on la rejette et l'on a

$$\lambda = \frac{2(m \cos \varphi - \sin \varphi)}{1 + m^2}.$$

En transportant dans l'équation (k) cette valeur de λ , on obtient l'équation de la tangente autre que $\overline{AB}$, issue de A, à la conique. Cette équation est

$$(1) \quad \begin{cases} [(1 - m^2) \cos \varphi - e(1 + m^2) + 2m \sin \varphi]x \\ + [2m \cos \varphi - (1 - m^2) \sin \varphi]y - p(1 + m^2) = 0. \end{cases}$$

L'équation de la tangente, autre que $\overline{AB}$, issue de B, intersection de $\overline{FB}$ et de $\overline{AB}$, sera de même

$$(2) \quad \begin{cases} [(1 - m'^2) \cos \varphi - e(1 + m'^2) + 2m' \sin \varphi]x \\ + [2m' \cos \varphi - (1 - m'^2) \sin \varphi]y - p(1 + m'^2) = 0. \end{cases}$$

(1) φ est l'angle que le rayon vecteur mené du foyer au point de contact de la tangente $\overline{AB}$ fait avec l'axe des x .

L'équation du lieu résulte de l'élimination de φ entre les équations (1) et (2).

Si l'on ordonne ces équations par rapport à $\cos \varphi$ et à $\sin \varphi$, et si l'on résout ce système d'équations par rapport à $\cos \varphi$ et à $\sin \varphi$, on trouve

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{(ex + p)[(1 - mm')x + (m' + m)y]}{(x^2 + y^2)(1 + mm')}, \\ \sin \varphi &= \frac{(ex + p)[(m' + m)x - (1 - mm')y]}{(x^2 + y^2)(1 + mm')}.\end{aligned}$$

Élevons au carré chacune de ces équations et additionnons; l'élimination est faite et, en chassant immédiatement le dénominateur commun, on obtient

$$(1 + mm')^2(x^2 + y^2)^2 = (ex + p)^2 \{ [(1 - mm')x + (m' + m)y]^2 + [(m' + m)x - (1 - mm')y]^2 \}$$

ou simplement

$$\begin{aligned}(1 + mm')^2(x^2 + y^2)^2 \\ = (ex + p)^2(x^2 + y^2)[(1 - mm')^2 + (m' + m)^2].\end{aligned}$$

Supprimant la solution évidemment étrangère $x^2 + y^2 = 0$ qui nous donne l'origine, il nous vient

$$(3) \quad (1 + mm')^2(x^2 + y^2) = (ex + p)^2(1 - m^2)(1 - m'^2)$$

ou

$$(3') \quad x^2 + y^2 - \frac{(1 - m^2)(1 - m'^2)}{(1 - mm')^2} (ex + p)^2 = 0,$$

équation d'une conique homofocale à la conique donnée, et symétrique par rapport à l'axe des x .

On peut, comme cas particuliers, étudier celui où $m' = -m$, c'est-à-dire celui où l'axe focal $\overline{FX}$ est bissectrice de l'angle des droites fixes $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ données, et celui où l'angle de ces droites $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ est droit.

(514)

Dans le premier cas, $-m = m'$, l'équation (3') devient

$$x^2 + y^2 - \frac{(1 + m^2)^2}{(1 - m^2)^2} (ex + p)^2 = 0.$$

Elle ne présente, d'ailleurs, rien de particulier.

Dans le deuxième cas, on a $1 + mm' = 0$, et l'équation (3) devient

$$(ex + p)^2 \left(\frac{m^2 + 1}{m} \right)^2 = 0$$

ou simplement

$$(ex + p)^2 = 0,$$

équation qui représente une droite double.

Cette droite a pour équation

$$ex + p = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b^2}{c} \quad (\text{elle est parallèle à FY}).$$

Dans le cas particulier du cercle, c'est-à-dire quand $e = 0$, l'équation (3') devient

$$x^2 + y^2 - \frac{(1 + m^2)(1 + m'^2)}{(1 + mm')^2} r^2 = 0,$$

équation d'un cercle concentrique au premier, et si $m = -m'$, cette équation devient simplement

$$x^2 + y^2 - \frac{(1 + m^2)^2}{(1 - m^2)^2} r^2 = 0.$$

Le rayon du cercle est égal à

$$\frac{1 + m^2}{1 - m^2} r.$$

Enfin, si, dans ce dernier cas de $e = 0$, l'angle des droites $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ était droit, c'est-à-dire si l'on avait

$$1 - mm' = 0$$

l'équation $(ex + p)^2 = 0$ obtenue précédemment de-

(515)

viendrait

$$r^2 = 0$$

et représenterait une droite rejetée à l'infini.