

A. HILAIRE

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1882

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 504-511

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_504_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1882 ;

SOLUTION ANALYTIQUE DE M. A. HILAIRE,

Professeur au lycée de Douai (¹).

On donne deux cercles se coupant aux points A et B. Une conique quelconque passant par ces points et tangente aux deux cercles rencontre l'hyperbole équilatère, qui a ces points pour sommets, en deux autres points C et D :

1° *Démontrer que la droite CD passe par un des centres de similitude des deux cercles donnés ;*

2° *Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par A et B, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences E et F ;*

3° *Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur l'une des circonférences E ou F ; démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent cette circonférence en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux circonférences données.*

(¹) Une solution géométrique a été donnée dans le numéro d'août 1882.

Préliminaires. — Je prends pour équations des deux cercles donnés

$$x^2 - 2ax + y^2 - b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2 + b^2 = r^2, \\ x^2 + 2a'x + y^2 - b'^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (x + a')^2 + y^2 = a'^2 + b'^2 = r'^2.$$

La conique devant passer par les points A et B et être tangente à chacun des deux cercles, son équation peut être mise sous l'une des deux formes suivantes :

$$x^2 - 2ax + y^2 - b^2 - \lambda x [(x - a) \cos \alpha + y \sin \alpha - r] = 0, \\ x^2 + 2a'x + y^2 - b'^2 - \lambda' x [(x + a') \cos \alpha' + y \sin \alpha' - r'] = 0^{(1)},$$

ou, en développant,

$$x^2(1 - \lambda \cos \alpha) - xy\lambda \sin \alpha + y^2 - x(2a - \lambda a \cos \alpha - \lambda r) - b^2 = 0, \\ x^2(1 - \lambda' \cos \alpha') - xy\lambda' \sin \alpha' + y^2 + x(2a' - \lambda' a' \cos \alpha' + \lambda' r') - b'^2 = 0.$$

Ces deux dernières équations représentent une même conique; les termes en y^2 ont le même coefficient, les termes indépendants sont égaux; donc les autres coefficients doivent être égaux.

$$(1) \quad 1 - \lambda \cos \alpha = 1 - \lambda' \cos \alpha',$$

$$(2) \quad \lambda \sin \alpha = \lambda' \sin \alpha',$$

$$(3) \quad \lambda(a \cos \alpha + r) - 2a = 2a' + \lambda'(r' - a' \cos \alpha').$$

Les équations (1) et (2) donnent $\tan \alpha' = \tan \alpha$, ce qui fait deux cas à distinguer.

Premier cas : $\alpha' = \alpha$.

T étant le point de contact de la conique avec le premier cercle, et T' avec le second,

T' est homologue de T, la droite TT' passe par le centre de similitude *externe* des deux cercles.

On a

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \quad \text{et} \quad \lambda' = \lambda.$$

⁽¹⁾ α et α' sont les angles que forment avec l'axe des x les rayons menés des centres des deux cercles à leurs points de contact T, T' avec la conique.

Deuxième cas : $\alpha' = \alpha + \pi$.

T étant le point de contact avec le premier cercle, et T'' avec le second, T'' est diamétralement opposé à T'. La droite TT'' passe par le centre de similitude *interne* des deux cercles donnés.

On a

$$\cos \alpha' = -\cos \alpha \quad \text{et} \quad \lambda' = -\lambda.$$

En résumé, $\lambda' = \pm \lambda$ avec $\cos \alpha' = \pm \cos \alpha$, les signes allant ensemble.

La relation (3) devient

$$\begin{aligned} & \lambda(a \cos \alpha + r) - 2a \\ &= 2a' \pm \lambda(r' \mp a' \cos \alpha) = 2a' - \lambda a' \cos \alpha \pm \lambda r', \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda = \frac{2(a + a')}{(a + a') \cos \alpha + r + r'},$$

et, parce que $a + a'$ est égal à la distance d des deux centres,

$$\lambda = \frac{2d}{d \cos \alpha + r \mp r'};$$

$r - r'$ correspond au premier cas, et $r + r'$ au deuxième.

Détermination du genre de la conique représentée par l'équation

$$\begin{aligned} & x^2(1 - \lambda \cos \alpha) - xy \lambda \sin \alpha + y^2 \\ & - x(2a - \lambda a \cos \alpha - \lambda r) - b^2 = 0. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \sin^2 \alpha - 4(1 - \lambda \cos \alpha) \\ &= \lambda^2(1 - \cos^2 \alpha) - 4(1 - \lambda \cos \alpha) = \lambda^2 - (2 - \lambda \cos \alpha)^2, \end{aligned}$$

et, en remplaçant λ par $\frac{2d}{d \cos \alpha + r \mp r'}$, il vient

$$\lambda^2 - (2 - \lambda \cos \alpha)^2 = \frac{4[d^2 - (r \mp r')^2]}{(d \cos \alpha + r \mp r')^2}.$$

Or, les deux cercles se coupant par hypothèse, on a, à

la fois,

$$d^2 > (r - r')^2 \quad \text{et} \quad d^2 < (r + r')^2.$$

Donc, dans le premier cas, l'équation représente des hyperboles et, dans le deuxième, des ellipses.

1. L'hyperbole équilatère, dont les sommets sont A et B, est représentée par

$$y^2 - x^2 - b^2 = 0.$$

En retranchant membre à membre les équations

$$y^2 - x^2 - b^2 = 0$$

et

$$x^2 - 2ax + y^2 - b^2 - \lambda x[(x - a) \cos \alpha + y \sin \alpha - r] = 0,$$

et supprimant le facteur x , on a, pour l'équation de la corde commune CD, différente de AB,

$$2(x - a) - \lambda[(x - a) \cos \alpha + y \sin \alpha - r] = 0.$$

Si l'on fait $y = 0$, on a

$$x - a = \frac{-\lambda r}{2 - \lambda \cos \alpha},$$

et, en remplaçant λ par $\frac{2d}{d \cos \alpha + r \mp r'}$, il vient

$$x - a = \frac{-dr}{r \mp r'}.$$

Premier cas : $x - a = \frac{-dr}{r - r'}$; la droite CD passe par le centre de similitude *externe* de deux cercles.

Deuxième cas : $x - a = \frac{-dr}{r + r'}$; CD passe par le centre de similitude *interne*.

2. *Lieu des centres des coniques représentées par l'équation*

$$x^2 - 2ax + y^2 - b^2 - \lambda x[(x - a) \cos \alpha + y \sin \alpha - r] = 0.$$

Les dérivées f'_x, f'_y du premier membre de cette équation étant

$$\begin{aligned} f'_x &= 2(x-a) - \lambda[(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] - \lambda x \cos\alpha, \\ f'_y &= 2y - \lambda x \sin\alpha, \end{aligned}$$

les coordonnées d'un centre satisfont aux équations

$$2(x-a) - \lambda[(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] - \lambda x \cos\alpha = 0$$

ou

$$2(x-a) - \lambda[(2x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] = 0$$

et

$$2y - \lambda x \sin\alpha = 0.$$

En remplaçant λ par $\frac{2d}{d\cos\alpha + r \mp r'}$, ces équations deviennent

$$(x-a)(d\cos\alpha + r \mp r') - d[(2x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - r] = 0,$$

$$y(d\cos\alpha + r \mp r') - dx\sin\alpha = 0,$$

d'où

$$dx\cos\alpha + dy\sin\alpha = (x-a)(r \mp r') + dr$$

et

$$dy\cos\alpha - dx\sin\alpha = -y(r \mp r').$$

Élevant au carré et ajoutant membre à membre, on a

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) d^2 \\ = [(x-a)^2 + y^2](r \mp r')^2 + 2dr(r \mp r')(x-a) + d^2 r^2. \end{aligned}$$

Le lieu des centres se compose donc de deux cercles dont on peut séparer immédiatement les équations; le premier de ces deux cercles, correspondant à $r = r'$, est le lieu des centres des hyperboles, et le second, le lieu des centres des ellipses.

Dans l'équation précédente, les coefficients sont trop compliqués pour qu'on puisse déterminer rapidement le centre et le rayon de chacun des deux cercles. On les détermine facilement au moyen des considérations suivantes.

D'après les préliminaires, les tangentes aux points T,

T' , T'' sont parallèles; donc le milieu de TT' est le centre de l'*hyperbole* $TT'AB$, et le milieu de TT'' est le centre de l'*ellipse* $TT''AB$.

Or les coordonnées des points T , T' , T'' sont respectivement

$$\begin{aligned}x_1 &= a + r \cos \alpha, & y_1 &= r \sin \alpha, \\x_2 &= -a' + r' \cos \alpha, & y_2 &= r' \sin \alpha, \\x_3 &= -a' - r' \cos \alpha, & y_3 &= -r' \sin \alpha.\end{aligned}$$

Donc les coordonnées du milieu de TT' sont

$$\begin{aligned}x &= \frac{a - a' + (r + r') \cos \alpha}{2}, \\y &= \frac{(r + r') \sin \alpha}{2}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\left(x - \frac{a - a'}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r + r'}{2}\right)^2.$$

La circonférence représentée par cette dernière équation est le lieu géométrique des centres des hyperboles.

De même, les coordonnées du milieu de TT'' sont

$$\begin{aligned}x &= \frac{(a - a') + (r - r') \cos \alpha}{2}, \\y &= \frac{(r - r') \sin \alpha}{2},\end{aligned}$$

d'où

$$\left(x - \frac{a - a'}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r - r'}{2}\right)^2,$$

équation d'une circonférence, lieu géométrique des centres des ellipses.

3. En multipliant par 2 l'équation de l'*hyperbole* variable, elle devient

$$\begin{aligned}2x^2(1 - \lambda \cos \alpha) \\ - 2xy\lambda \sin \alpha + 2y^2 - 2x[2a - \lambda(a \cos \alpha + r)] - 2b^2 = 0,\end{aligned}$$

de la forme

$$A x^2 + 2 B xy + C y^2 + 2 D x + F = 0;$$

et l'équation de l'ensemble des deux asymptotes est alors, comme on sait,

$$A x^2 + 2 B xy + C y^2 + 2 D x + \frac{CD^2}{AC - B^2} = 0.$$

Les asymptotes coupent l'axe des y en des points dont les ordonnées s'obtiennent en faisant $x = 0$, dans cette dernière équation, ce qui donne

$$y^2 = \frac{D^2}{B^2 - AC}.$$

Mais

$$D^2 = [\lambda(a \cos \alpha + r) - 2a]^2$$

ou, en remplaçant λ par sa valeur $\frac{2d}{d \cos \alpha + r - r'}$,

$$D^2 = \left[\frac{2d(a \cos \alpha + r)}{d \cos \alpha + r - r'} - 2a \right]^2 = \frac{4[d r - a(r - r')]^2}{(d \cos \alpha + r - r')^2}.$$

D'ailleurs, on a déjà calculé la valeur de

$$\frac{B^2}{AC} = \frac{4[d^2 - (r - r')^2]}{(d \cos \alpha + r - r')^2};$$

donc

$$\frac{D^2}{B^2 - AC} = \frac{[d r - a(r - r')]^2}{d^2 - (r - r')^2}.$$

Cette valeur de $\frac{D^2}{B^2 - AC}$ est indépendante des variables α, λ ; donc les asymptotes des hyperboles coupent, en deux points fixes, l'axe des y , qui est l'axe radical des deux cercles donnés.

Pour savoir quels sont ces deux points fixes, il suffit de considérer un cas particulier. Supposons, par exemple, que la droite TT' se confonde avec une des tangentes communes aux deux cercles. L'hyperbole $TT'AB$ se réduit alors aux deux droites TT' et AB ; par conséquent,

le point de rencontre de la tangente commune TT' et de l'axe radical AB est un des deux points fixes. L'autre est le point de rencontre de la seconde tangente commune et de l'axe radical. •

Note. — Des solutions de la même question nous ont été adressées par MM. Moret-Blanc; Ernest Malo, lieutenant du génie à Besançon; L. Blanchard, boursier à la Faculté de Clermont-Ferrand; Haure et A. Goulard, élèves à l'École Normale supérieure; Bertagne, élève du lycée de Marseille.