

ALFRED CHAMBEAU

Concours d'admission à l'École centrale en 1881, seconde session

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 500-504

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_500_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1884,

SECONDE SESSION

(voir 3^e série, t. I, p. 365);

SOLUTION DE M. ALFRED CHAMBEAU,

Élève du Lycée Condorcet.

On donne une parabole $y^2 = 2px$, rapportée à son axe et à son sommet, et un point $P(\alpha, \beta)$ dans le plan de la courbe :

1° Démontrer que du point P on peut, en général, mener trois normales à la parabole ; former l'équation du troisième degré qui donne les ordonnées des pieds A, B, C de ces normales ;

2° Démontrer que chacune des deux courbes

$$\begin{aligned}xy + (p - \alpha)y - p\beta &= 0, \\y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x &= 0,\end{aligned}$$

passent par les quatre points A, B, C, P et trouver l'équation générale de toutes les coniques passant par ces quatre points ;

3° Chacune de ces coniques coupe la parabole donnée aux trois points fixes A, B, C et en un quatrième point D ; trouver les coordonnées du point D ;

4° Par le sommet de la parabole donnée, on imagine deux droites parallèles aux asymptotes de l'une quelconque des coniques précédentes ; on mène la droite joignant les points d'intersection de ces deux droites avec la conique, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre

avec la parallèle DD' menée à l'axe de la parabole par le point D;

Former et discuter le lieu de ce point de rencontre.

1° L'équation de la parabole est

$$(1) \quad y^2 = 2px;$$

celle de la normale

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).$$

La normale devant passer par le point P(α , β), on a la condition

$$\beta - y = -\frac{y}{p}(\alpha - x).$$

Les points d'incidence sont à l'intersection de la parabole avec l'hyperbole équilatère ayant pour équation

$$(2) \quad xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0;$$

il y a ordinairement trois points d'intersection, et par suite trois normales. Si l'hyperbole est tangente à la parabole, il n'y a plus que deux solutions; enfin, d'après la position même des deux coniques, il y a toujours un point réel d'intersection.

Cherchons l'équation aux ordonnées des points d'incidence; éliminant x entre les équations (1) et (2), on obtient

$$(3) \quad y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0,$$

équation du troisième degré qui montre qu'il y aura ordinairement trois solutions; elle a d'ailleurs toujours une racine réelle.

La condition pour que cette équation ait une racine double est, après simplification,

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 = 0.$$

C'est le lieu des points P par lesquels on peut mener deux normales à la parabole, c'est la *développée de la parabole*; cette courbe divise le plan en deux régions : dans l'une on a

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 > 0$$

et l'on ne peut mener par un point qu'une normale à la parabole; dans l'autre on a

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 < 0$$

et l'on peut mener d'un point trois normales à cette courbe.

2° L'équation

$$(4) \quad y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0$$

représente une ellipse, et elle résulte de l'élimination de p entre les équations (1) et (2), car de l'équation (1) on tire

$$p = \frac{y^2}{2x};$$

remplaçant p par $\frac{y^2}{2x}$ dans l'équation (2), on a

$$y(y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x) = 0,$$

équation qui donne $y = 0$, axe des x , et

$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0,$$

résultant de la combinaison des équations (1) et (2). Cette équation représente une conique passant par les points d'intersection de la parabole et de l'hyperbole équilatère, c'est-à-dire par les pieds des normales menées du point P; on vérifie de même facilement que le point P est sur cette ellipse.

Il suit de là que l'équation générale des coniques passant par les quatre points A, B, C, P est

$$(5) \quad xy + (p - \alpha)y - p\beta + \lambda(y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x) = 0.$$

3° Nous savons que les coniques représentées par l'équation (5) coupent la parabole aux points A, B, C. Cherchons les coordonnées du quatrième point d'intersection D : l'équation aux ordonnées de ce point s'obtient en éliminant x entre les équations (1) et (5), ce qui donne

$$p[y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta] + \lambda y[y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta] = 0$$

ou

$$[y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta](\lambda y + p) = 0$$

et, par suite, les deux équations

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0,$$

correspondant aux trois points A, B, C, et $\lambda y + p = 0$ ou $y = -\frac{p}{\lambda}$, ordonnée du point D. Son abscisse, tirée de l'équation (1), est

$$x = \frac{p}{2\lambda^2}.$$

4° L'équation (5) ordonnée est

$$(6) \quad \lambda y^2 + xy + 2\lambda x^2 + (p - \alpha - \beta\lambda)y - 2\lambda\alpha x - p\beta = 0;$$

L'équation donnant les directions asymptotiques est

$$(7) \quad \lambda y^2 + xy + 2\lambda x^2 = 0.$$

En retranchant ces deux équations membre à membre, on a

$$(8) \quad (p - \alpha - \beta\lambda)y - 2\lambda\alpha x - p\beta = 0.$$

C'est l'équation de la droite passant par les points d'intersection de la conique et des directions asymptotiques. La parallèle à l'axe de la parabole passant par le point D a pour équation

$$(9) \quad y = -\frac{p}{\lambda}.$$

Éliminons λ entre les équations (8) et (9), nous aurons l'équation du lieu demandé

$$y^2 = \frac{2p\alpha}{\alpha - p} x,$$

équation d'une parabole ayant même axe et même sommet que la parabole donnée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Sequestre, Maître-Répétiteur au Lycée d'Angoulême.