

MAURICE D'OCAGNE

**Sur les propriétés segmentaires du triangle.
Solution du problème général : mener par le
sommet d'un triangle d'une droite qui divise
le côté opposé en segments proportionnels
aux puissances nièmes des côtés adjacents**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 497-500

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__497_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES PROPRIÉTÉS SEGMENTAIRES DU TRIANGLE.

SOLUTION DU PROBLÈME GÉNÉRAL : MENER PAR LE SOMMET D'UN TRIANGLE UNE DROITE QUI DIVISE LE CÔTÉ OPPOSÉ EN SEGMENTS PROPORTIONNELS AUX PUISSANCES $n^{\text{èmes}}$ DES CÔTÉS ADJACENTS,

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

La bissectrice divise dans le triangle le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents ; la ligne que nous avons appelée *symédiane* ⁽¹⁾, c'est-à-dire la droite symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice, divise le côté opposé, ainsi que nous l'avons démontré, en parties proportionnelles aux carrés des côtés adjacents. Nous avons été ainsi amené à nous poser le problème énoncé dans le sous-titre de cette Note, et à essayer de le résoudre par une construction géométrique *directe*.

Nous avons tenu d'ailleurs à ce que notre solution fût purement géométrique et élémentaire. Elle est tout entière contenue dans le théorème général que voici et qui, croyons-nous, n'a jamais été remarqué :

THÉORÈME. — *Si la droite AX, issue du sommet A*

(1) *Nouv. Ann.*, 3^e série, t. II, p. 450.

d'un triangle, divise le côté opposé BC dans le rapport

$$\frac{XB}{XC} = \frac{\overline{AB}^n}{\overline{AC}^n}, \text{ si le point } X_1 \text{ est le symétrique du point } X$$

par rapport au milieu M du côté BC, enfin si la droite AY est symétrique de la droite AX₁ par rapport à la bissectrice AE de l'angle BAC, cette droite AY

$$\text{divise le côté BC dans le rapport } \frac{YB}{YC} = \frac{\overline{AB}^{n+2}}{\overline{AC}^{n+2}}.$$

Soient

X₁P et X₁Q les perpendiculaires abaissées du point X₁ sur les côtés AB et AC;

YU et YV les perpendiculaires abaissées du point Y sur les mêmes côtés;

AH la hauteur abaissée du sommet A.

Nous avons

$$\frac{X_1P}{AH} = \frac{X_1B}{AB}, \quad \frac{X_1Q}{AH} = \frac{X_1C}{AC}.$$

Donc

$$\frac{X_1P}{X_1Q} = \frac{X_1B \cdot AC}{X_1C \cdot AB}$$

ou, puisque X₁B = XC et X₁C = XB,

$$\frac{X_1P}{X_1Q} = \frac{XC \cdot AC}{XB \cdot AB} = \frac{\overline{AC}^{n+1}}{\overline{AB}^{n+1}}.$$

La droite AY étant symétrique de AX₁ par rapport à la bissectrice AE de l'angle BAC, on a

$$\frac{YU}{YV} = \frac{X_1Q}{X_1P} = \frac{\overline{AB}^{n+1}}{\overline{AC}^{n+1}};$$

et comme $\frac{YU}{AH} = \frac{YB}{AB}$, $\frac{YV}{AH} = \frac{YC}{AC}$, on a aussi

$$\frac{YU}{YV} = \frac{YB \cdot AC}{YC \cdot AB}, \quad \text{d'où} \quad \frac{YB \cdot AC}{YC \cdot AB} = \frac{\overline{AB}^{n+1}}{\overline{AC}^{n+1}}$$

et, par suite,

$$\frac{YB}{YC} = \frac{\overline{AB}^{n+2}}{\overline{AC}^{n+2}}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — Le théorème précédent permet de faire dériver géométriquement la droite issue du sommet A, qui divise le côté BC dans le rapport $\frac{AB^n}{AC^n}$, de la bissectrice ou de la symédiane, suivant que n sera impair ou pair, puisqu'il permet de faire croître l'exposant n de deux en deux unités.

Remarque I. — Le théorème peut être pris à l'inverse et permet alors d'étendre la construction au cas où l'exposant n est négatif, c'est-à-dire où les segments sont inversement proportionnels à des puissances données des côtés adjacents.

Remarque II. — Il résulte de la démonstration que, si $\frac{YB}{YC} = \frac{\overline{AB}^{n+2}}{\overline{AC}^{n+2}}$, on a

$$\frac{YU}{YV} = \frac{\overline{AB}^{n+1}}{\overline{AC}^{n+1}};$$

on voit par là que le théorème précédent permet aussi de diviser l'angle BAC en deux parties dont les sinus soient proportionnels à des puissances données des côtés adjacents.

Remarque III. — Il est bien clair que les trois droites issues respectivement des trois sommets et divisant les côtés opposés proportionnellement à la même puissance n des côtés adjacents concourent au même point.

Ce point est tel que ses distances aux trois côtés sont proportionnelles aux puissances $n - 1$ de ces côtés.

Il se confond avec le point pour lequel la somme des

(500)

puissances $\frac{n}{n-1}$ des distances aux trois côtés du triangle
est minimum.