

S. RÉALIS

Résolution d'une équation indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 494-497

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__494_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE;

PAR M. S. RÉALIS,

Ingénieur à Turin.

Soit proposé de résoudre, en nombres entiers, l'équation indéterminée

$$x^2 + nxy - ny^2 = 1,$$

dans laquelle n est un entier donné.

On s'assure facilement, par la substitution directe, que si une solution particulière est donnée par l'égalité

$$x^2 + n\alpha\beta - n\beta^2 = 1,$$

on arrivera à une nouvelle solution au moyen des formules

$$\begin{cases} x = (n+1)\alpha - n\beta, \\ y = (n+2)\alpha - (n+1)\beta. \end{cases}$$

en admettant que n est différent de -1 et de -2 .

Cette solution, cependant, n'en produit pas d'autre, vu que, en y appliquant les mêmes formules, on retombe sur les valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$. Mais la nature même de l'équation nous conduit à assigner une troisième solution distincte de la première et associée à la seconde, après quoi la continuation du procédé donnera naissance à une infinité de solutions subséquentes.

D'après cela, les valeurs initiales $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ayant amené les valeurs $x = n+1$, $y = n+2$, résolvons l'équation par rapport à l'inconnue x , après y avoir fait $y = n+2$. Il nous viendra

$$x = -\frac{n(n+2)}{2} \pm \frac{n^2 + 4n + 2}{2},$$

où le signe supérieur correspond à la solution précédente, tandis que le signe inférieur nous met en présence de la solution associée

$$\begin{cases} x = -(n^2 + 3n - 1), \\ y = n + 2, \end{cases}$$

ou, en changeant les signes de x et de y , ce qui n'altère pas le résultat de la substitution dans la proposée,

$$\begin{cases} x = n^2 + 3n - 1, \\ y = -(n + 2). \end{cases}$$

De celle-ci, par les mêmes formules, dérive une nouvelle solution, accompagnée d'une autre qui lui est associée, et ainsi de suite.

Remarque. — Écrivons les valeurs successives de x comme il suit :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 1 - n, \\ x_3 &= 1 + 3n - n^2, \\ x_4 &= 1 + 6n + 5n^2 - n^3, \\ x_5 &= 1 + 10n + 15n^2 + 7n^3 - n^4, \\ x_6 &= 1 + 15n + 35n^2 + 28n^3 + 9n^4 - n^5, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

où le terme indépendant de n est partout égal à l'unité. Nous reconnaitrons aussitôt que les coefficients de n sont donnés par la suite des nombres triangulaires; ceux de n^2 par la suite des nombres figurés du quatrième ordre; ceux de n^3 par la suite des nombres figurés du sixième ordre, etc. On est conduit à conclure de là que l'on doit avoir, en général,

$$\begin{aligned} x_a = 1 &+ \frac{(a-1)a}{2} n + \frac{(a-2)(a-1)a(a+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4} n^2 \\ &- \frac{(a-3)(a-2) \dots (a+2)}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} n^3 - \dots - n^{a-1}, \end{aligned}$$

le coefficient de n^k étant

$$\frac{(a-k)(a-k+1)(a-k+2)\dots(a+k-1)}{2.3.4\dots(2k-1).2k},$$

et c'est ce qui a lieu en effet ; la vérification est facile, et nous ne nous y arrêterons pas.

Quant aux valeurs de γ , on observera d'abord que, par la méthode même, chaque valeur d'indice impair est égale et de signe contraire à celle qui la précède, d'indice pair ; c'est-à-dire que l'on a constamment

$$\gamma_{2k+1} = -\gamma_{2k}.$$

Il ne sera pas difficile d'établir ensuite la formule générale

$$\begin{aligned} \gamma_a = a + \frac{(a-1)a(a+1)}{2.3} n + \frac{(a-2)(a-1)\dots(a+2)}{2.3.4.5} n^2 \\ - \frac{(a-3)(a-2)\dots(a+3)}{2.3.4.5.6.7} n^3 + \dots + n^{a-1}, \end{aligned}$$

pour toute valeur paire de l'indice a . On voit ici apparaître, comme coefficients des différentes puissances de n , les nombres figurés d'ordre impair, de même que les nombres d'ordre pair se sont présentés dans l'expression de x_a . Le coefficient de n^k , dans γ_a , est

$$\frac{(a-k)(a-k+1)(a-k+2)\dots(a+k)}{2.3.4\dots(2k+1)}.$$

Signalons la relation

$$\gamma_a - \gamma_{a-2} = x_{a-1} + x_a,$$

qui a lieu pour toute valeur paire de a , et d'où l'on déduit

$$\gamma_a = x_1 + x_2 - x_3 + \dots + x_{a-1} + x_a.$$

Cette formule nous reproduit (d'après la sommation connue des séries relatives aux nombres figurés) l'expression ci-dessus de γ_a en fonction de n .

Nous ajouterons, en terminant, que l'équation qui vient d'être traitée est un cas particulier d'une classe d'équations appartenant à la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 = h,$$

et dont la résolution s'obtient par des moyens analogues, sans avoir recours aux méthodes générales.
