

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 471-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__471_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1399

(voir 3^e série, t. 1, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

En chaque point d'une conique on mène un diamètre et la normale. Trouver le lieu de l'intersection du diamètre et de la tangente à l'autre extrémité de la corde normale.

(E. FAUQUEMBERGUE.)

1^o Soient

$$(1) \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

l'équation d'une ellipse, et x_1, y_1 les coordonnées d'un point pris sur la courbe. L'équation de la normale en ce point est

$$(2) \quad b^2 x_1 y - a^2 y_1 x + c^2 x_1 y_1 = 0.$$

Éliminant y entre ces deux équations, on a, pour déterminer les abscisses des points d'intersection de la

(472).

normale et de l'ellipse, l'équation

$$(b^6 x_1^2 + a^6 y_1^2)x^2 - 2a^4 c^2 x_1 y_1^2 x + a^2 c^4 x_1^2 y_1^2 - a^2 b^6 x_1^2 = 0,$$

qui admet la racine $x = x_1$. Divisant par $x - x_1$ et égalant le quotient à zéro, on a pour abscisse du second point d'intersection de la corde normale

$$x' = - \frac{x_1 [b^6 x_1^2 + a^4 (2b^2 - a^2)y_1^2]}{b^6 x_1^2 - a^6 y_1^2},$$

d'où

$$y' = - \frac{y_1 [a^6 y_1^2 + b^4 (2a^2 - b^2)x_1^2]}{b^6 x_1^2 - a^6 y_1^2}.$$

L'équation de la tangente à l'ellipse en ce point est

$$b^2 x x' + a^2 y y' - a^2 b^2 = 0$$

ou

$$b^2 x x_1 [b^6 x_1^2 + a^4 (2b^2 - a^2)y_1^2] + a^2 y y_1 [a^6 y_1^2 + b^4 (2a^2 - b^2)x_1^2] + a^2 b^2 (b^6 x_1^2 - a^6 y_1^2) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (b^2 x x_1 + a^2 y y_1)(b_1^2 x - a^6 y_1^2) \\ + 2a^4 b^4 (x x_1 y_1^2 + y y_1 x_1^2) + a^2 b^2 (b^6 x_1^2 + a^6 y_1^2) = 0. \end{array} \right.$$

L'équation du diamètre passant par le point (x_1, y_1) est

$$(4) \quad \frac{x}{x_1} = - \frac{y}{y_1},$$

et l'on a la relation

$$(5) \quad b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2.$$

On aura l'équation du lieu demandé en éliminant x_1 et y_1 entre ces trois équations.

Des deux dernières on tire

$$x_1 = \frac{abx}{-\sqrt{b^2 x^2 - a^2 y^2}}, \quad y_1 = \frac{aby}{-\sqrt{b^2 x^2 - a^2 y^2}}.$$

(473)

Reportant ces valeurs dans l'équation (3), on a, en divisant par $a^3 b^3$,

$$(b^2 x^2 - a^2 y^2)(b^6 x^2 - a^6 y^2) + 4 a^4 b^4 x^2 y^2 \\ = ab(b^6 x^2 + a^6 y^2) \sqrt{b^2 x^2 + a^2 y^2},$$

ou, en élevant au carré,

$$[b^8 x^4 + a^8 y^4 - a^2 b^2 (a^4 + b^4 - 4 a^2 b^2) x^2 y^2]^2 \\ = a^2 b^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2)^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2).$$

L'équation est du huitième degré; mais, comme elle ne contient que des termes du huitième et du sixième degré, on peut la résoudre en coordonnées polaires. On a

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 (a^6 \sin^2 \theta + b^6 \cos^2 \theta)^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}{[a^8 \sin^4 \theta + b^8 \cos^4 \theta - a^2 b^2 (a^4 + b^4 - 4 a^2 b^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta]^2}.$$

La courbe est symétrique par rapport aux axes et touche l'ellipse à ses quatre sommets.

Pour l'hyperbole, il suffirait de changer b^2 en $-b^2$.

2° Soient

$$y^2 = 2p.x$$

et

$$p(y - y_1) - y_1(x - x_1) = 0$$

l'équation d'une parabole et celle de sa normale au point x_1, y_1 . Éliminant x entre ces deux équations, et supprimant de l'équation résultante la racine $y = y_1$, on a, pour l'ordonnée du second point d'intersection de la corde normale et de la parabole,

$$y' = - \frac{y_1^2 + p^2}{y_1},$$

d'où

$$x' = \frac{(y_1^2 + p^2)^2}{2py_1^2}.$$

La tangente au point (x', y') , a pour équation

$$\frac{-y'(y_1^2 + p^2)}{y_1} = \frac{2py_1^2 x' - (y_1^2 + p^2)^2}{2y_1^2},$$

et le lieu de son intersection avec le diamètre $y = y_1$,

$$(y^2 + p^2)^2 + 2y^2(y^2 + p^2) + 2py^2x = 0$$

ou

$$(y^2 + p^2)(3y^2 + p^2) + 2py^2x = 0.$$

La courbe située tout entière du côté des x négatifs est symétrique par rapport à l'axe de la parabole qui est asymptote des deux branches : elle est limitée vers la droite à l'abscisse $x = -p(2 + \sqrt{3})$.

Note. — La même question a été résolue par M. Lez et par un anonyme.

Question 1401

(voir 3^e série, t. I, p. 240) ,

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Soit q_p le quotient de la division de n par p , on a

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_n^2 = q_1 + 3q_2 + 5q_3 + \dots + (2n-1)q_n.$$

(E. CÉSARO.)

Soit r le reste de la division de n par p , posons $q_p = P$. De

$$(1) \quad n = pP + r \quad \text{ou} \quad \frac{n}{p} = p + \frac{r}{p},$$

on conclut que q_p est égal ou supérieur à p suivant que $r < P$ ou $r \geq P$.

L'égalité (1) revient à

$$n = (P+1)p - (p-r),$$

et, parce que $r < p$, on a

$$n < (P+1)p, \quad \frac{n}{p+1} < p,$$

c'est-à-dire que le quotient q_{p+1} est inférieur à p .

On a évidemment

$$n = q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq \dots \geq q_{p-1} \geq q_p \geq q_{p+1} \geq \dots \geq q_n.$$

Il résulte de ce qui précède que dans la suite

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_{p-1}, q_p, q_{p+1}, \dots, q_n,$$

il y a p ou q_p quotients qui sont égaux ou supérieurs à p .

Par la même raison, il y aura q_{p+1} quotients égaux ou supérieurs à $p+1$. Donc le nombre des quotients égaux à p est $q_p - q_{p+1}$.

Ainsi, la somme

$$s = q_1^\alpha + q_2^\alpha + q_3^\alpha + \dots + q_{n-1}^\alpha + q_n^\alpha,$$

contient

$$q_1 - q_2 \text{ termes égaux à } 1^\alpha,$$

$$q_2 - q_3 \quad \quad \quad \text{»} \quad \quad \quad 2^\alpha,$$

$$q_3 - q_4 \quad \quad \quad \text{»} \quad \quad \quad 3^\alpha,$$

$$\dots\dots\dots$$

et enfin

$$q_n - q_{n+1} \text{ ou } q_n \text{ termes égaux à } n^\alpha.$$

Donc on a, quel que soit l'exposant α ,

$$s = (q_1 - q_2)1^\alpha + (q_2 - q_3)2^\alpha + (q_3 - q_4)3^\alpha + \dots + (q_{n-1} - q_n)(n-1)^\alpha + q_n n^\alpha,$$

d'où

$$q_1^\alpha + q_2^\alpha + q_3^\alpha + \dots + q_n^\alpha = q_1 1^\alpha + q_2(2^\alpha - 1^\alpha) + q_3(3^\alpha - 2^\alpha) + \dots + q_n[n^\alpha - (n-1)^\alpha].$$

En faisant $\alpha = 2$, on a

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_n^2 = q_1 + 3q_2 + 5q_3 + \dots + (2n-1)q_n,$$

ce qui est la relation proposée.

Question 1453

(voir 3^e série, t. II, p. 336);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,

Professeur au lycée de Nice.

Le nombre $\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1} + (\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$ est la somme des carrés de deux nombres entiers. (CATALAN.)

Posons

$$(\sqrt{2}+1)^{2n-1} = x\sqrt{2} + y, \quad (\sqrt{2}-1)^{2n-1} = x\sqrt{2} - y;$$

x n'est autre chose que le nombre proposé ⁽¹⁾.

En multipliant ces deux égalités membre à membre, on obtient l'équation

$$2x^2 - y^2 = 1$$

ou encore

$$x^2 = \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2} + 1\right)^2,$$

équation de la forme

$$X^2 = Y^2 + Z^2,$$

dont les solutions en nombres entiers sont données par les formules

$$X = a^2 + b^2, \quad Y = a^2 - b^2, \quad Z = 2ab,$$

où a et b représentent des nombres entiers.

Le nombre proposé est donc bien la somme de deux carrés.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

⁽¹⁾ Et y est un nombre entier impair.

Question 1463

(voir 3^e série, t. II, p. 181);

PAR M. JOSEPH CHAMBON (1).

Étant donné un point P sur une ellipse de centre O, on mène en ce point une tangente et la normale qui touche au point Q la développée de l'ellipse, et l'on fait passer un cercle par les extrémités R, R' du diamètre conjugué à OP, et par la projection S du centre O sur la tangente en P, puis l'on prolonge OS jusqu'à sa rencontre en S' avec le cercle; démontrer que OS' = PQ.

La droite PQ est, comme on sait, le rayon de courbure de l'ellipse au point P. Et, en nommant a, b les demi-axes de l'ellipse et b' le demi-diamètre conjugué à OP, on a

$$PQ = \frac{b'^3}{ab}$$

(voir, dans le *Traité des Sections coniques* de G. SAUMON, les expressions des rayons de courbure).

D'autre part, OS étant la perpendiculaire menée du centre de l'ellipse à la tangente PS, on a

$$OS = \frac{ab}{b'}.$$

Donc le produit

$$PQ \times OS = \frac{b'^3}{ab} \times \frac{ab}{b'} = b'^2.$$

Mais, les cordes SS', RR' du cercle RSR' se coupant au point O, on a

$$OS' \times OS = OR' \times OR = OR^2 = b'^2.$$

(1) Lorsque M. Chambon nous a adressé l'énoncé et la solution de la question 1463, il était élève au Lycée de Bordeaux.

Les égalités $PQ \times OS = b'^2$ et $OS' \times OS = b'^2$ donnent $OS' = PQ$. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et J. Rénoy.

Question 1466

(voir 3^e série, t. II, p. 181),

PAR M. MAURICE RACLOT,

Élève de l'École préparatoire Sainte-Barbe.

ABCD étant un trapèze, on joint les extrémités A et D du côté oblique AD à un point M du côté BC; on mène une parallèle à DM par le point B et une parallèle à AM par le point C. Démontrer que ces deux droites se coupent sur AD.

(D'OCAGNE.)

Soient O et O' les points de rencontre du côté AD, et des parallèles aux droites DM, AM, menées des points B et C.

Je prolonge les côtés AD, BC du trapèze jusqu'à leur rencontre en K.

On a, en vertu des parallèles AM, O'C, l'égalité de rapports

$$\frac{KO'}{KA} = \frac{KC}{KM},$$

d'où

$$KO' = \frac{KA \cdot KC}{KM}.$$

De même, le parallélisme des droites DM, OB donne

$$\frac{KO}{KD} = \frac{KB}{KM},$$

d'où

$$KO = \frac{KD \cdot KB}{KM}.$$

Mais, les bases AB, DC du trapèze ABCD étant pa-

raillèles, on a

$$\frac{KA}{KD} = \frac{KB}{KC},$$

d'où

$$KA.KC = KD.KB, \text{ et par suite } KO = KO';$$

c'est-à-dire que les deux points O et O' coïncident.

Donc, les droites menées des points B et C , parallèlement à DM et AM , se coupent sur AD . c. q. f. d.

Note. — La même question a été résolue par MM. Romero et Moret-Blanc.