

MAURICE D'OCAGNE

**Sur un élément du triangle rectiligne
; symédiane**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 450-464

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_450_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN ÉLÉMENT DU TRIANGLE RECTILIGNE; SYMÉDIANE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. J'ai publié, en 1880, une *Note sur une ligne considérée dans le triangle rectiligne* ⁽¹⁾, où j'étudiais les propriétés d'un élément dont on ne s'était pas encore occupé, à ma connaissance, et qui présente cependant de l'intérêt tant par la simplicité de ses propriétés que par les nombreuses applications qui en résultent. Ayant eu, depuis, l'occasion de m'en servir dans diverses questions intéressantes, je demanderai la permission de revenir sur cette petite théorie de Géométrie élémentaire, en la modifiant sur certains points et la complétant par de nouvelles et nombreuses remarques. Je commencerai par donner des démonstrations absolument géométriques des théorèmes bien simples qui en sont la base; je les ferai suivre de quelques applications importantes.

(1) *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. IV, p. 539.

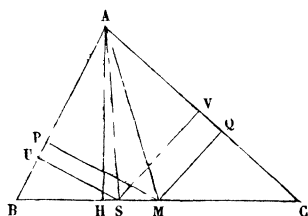
2. *Définition.* — L'élément qui nous occupe est la droite symétrique de la médiane d'un triangle par rapport à la bissectrice issue du même sommet; pour abréger le langage, nous demanderons la permission de donner à cette droite, dans la suite de cette Note, le nom de *symédiane*, qui rappelle sa définition.

3. THÉORÈME I. — *Si l'on porte sur le côté AB la longueur AC' égale à AC, et sur le côté AC la longueur AB' égale à AB, la symédiane issue du sommet A passe par le milieu de B'C'.*

Cela résulte sans démonstration de la définition qui vient d'être donnée; on en conclut un moyen commode de construire la symédiane.

4. THÉORÈME II. — *Les distances d'un point de la symédiane aux côtés adjacents sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés (fig. 1).*

Fig. 1



Prenons, par exemple, le point S où la symédiane AS rencontre le côté opposé. Soit AM la médiane. Abaissons les perpendiculaires MP et SU sur le côté AB, MQ et SV sur le côté AC.

Les droites AS et AM étant, par définition, symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{BAC}$, on a

$$\widehat{BAS} = \widehat{CAM}, \quad \widehat{BAM} = \widehat{CAS}.$$

Dès lors, les triangles ASU et AMQ sont semblables, ainsi que les triangles AMP et ASV, ce qui donne

$$\frac{SU}{AS} = \frac{MQ}{AM}, \quad \frac{SV}{AS} = \frac{MP}{AM},$$

et, par division,

$$\frac{SU}{SV} = \frac{MQ}{MP}.$$

Si nous considérons la hauteur AH, nous avons

$$\frac{MQ}{MC} = \frac{AH}{AC}, \quad \frac{MP}{MB} = \frac{AH}{AB}$$

et, par division, en remarquant que MB = MC,

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{AB}{AC};$$

done

$$\frac{SU}{SV} = \frac{AB}{AC}.$$

C. Q. F. D.

5. COROLLAIRE. — *Les trois symédianes d'un triangle concourent en un même point dont les distances aux trois côtés sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.*

En effet, d , d' , d'' étant ces distances, nous avons, d'après le théorème précédent, pour le point de rencontre des symédianes issues des sommets A et B,

$$\frac{d'}{b} = \frac{d''}{c} \quad \text{et} \quad \frac{d}{a} = \frac{d''}{c};$$

par suite,

$$\frac{d'}{b} = \frac{d}{a},$$

ce qui prouve que ce point se trouve sur la symédiane issue du sommet C, et l'on a

$$\frac{d}{a} = \frac{d'}{b} = \frac{d''}{c}.$$

6. THÉORÈME III. — *Les segments déterminés par une symédiane sur le côté opposé sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents.*

On a, en effet (fig. 1),

$$\frac{SB}{SU} = \frac{AB}{AH}, \quad \frac{SC}{SV} = \frac{AC}{AH}$$

et, par division,

$$\frac{SB}{SC} = \frac{SU}{SV} \frac{AB}{AC}$$

ou, d'après le théorème II,

$$\frac{SB}{SC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

7. COROLLAIRE I. — *Dans le triangle rectangle, la symédiane issue du sommet de l'angle droit se confond avec la hauteur.*

La propriété précédente appartient, en effet, à la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse.

8. COROLLAIRE II. — *Les antiparallèles de la symédiane issue de l'angle A par rapport aux angles ABC et ACB coupant le côté BC aux points I et K, on a BI = CK.*

Car on voit que

$$BI = \frac{\overline{AB}^2}{BS} \quad \text{et} \quad CK = \frac{\overline{AC}^2}{CS}.$$

On peut remarquer, en outre, que :

L'angle IAK est supplémentaire de l'angle BAC.

9. THÉORÈME IV. — *Le point de concours des symé-*

dianes est le barycentre des sommets A, B, C respectivement affectés des coefficients a^2 , b^2 , c^2 .

Si l'on joint le point A à ce barycentre, la droite ainsi obtenue coupera BC en un point S, dans le rapport inverse des coefficients; or, B étant affecté du coefficient b^2 , C du coefficient c^2 , on aura

$$\frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

AS est donc bien symédiane, et le théorème est établi.

10. THÉORÈME V. — *La perpendiculaire élevée à la base BC par le pied S de la symédiane AS, rencontrant aux points B' et C' les perpendiculaires élevées à AB et à AC par les points B et C, on a*

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB^3}{AC^3}.$$

En effet, AH étant la hauteur, on a

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{BS}{AH}, \quad \frac{CC'}{AC} = \frac{CS}{AH};$$

donc

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{BS}{CS} \cdot \frac{AB}{AC},$$

ou, en vertu du théorème III,

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{AC}^3}.$$

APPLICATIONS.

11. PROBLÈME. — *Par le point de concours de deux droites, en tirer une autre telle que le rapport des*

distances de chacun de ses points aux deux premières ait une valeur donnée.

On porte sur les deux droites des longueurs qui soient entre elles dans le rapport demandé, et l'on prend la symédiane du triangle ainsi formé (théorème II).

12. PROBLÈME. — *Diviser une droite a dans le rapport des carrés de deux droites b et c .*

On forme un triangle avec les trois droites, et l'on prend la symédiane correspondant au côté a (théorème III).

Si l'on ne peut former un triangle avec les trois droites données, on augmente b et c dans un même rapport, de façon à rendre la construction possible. Cette solution est plus simple que la solution classique qui repose sur l'emploi d'un triangle rectangle.

Il est d'ailleurs à remarquer que le triangle (a, b, c) se trouvera souvent tout formé sur la figure.

13. PROBLÈME. — *Trouver à l'intérieur d'un triangle un point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle soit un minimum.*

Prenons à l'intérieur d'un triangle ABC un point dont les distances respectives aux côtés a, b, c soient désignées par d, d', d'' .

Exprimant que les trois triangles déterminés par ce point ont une somme de surfaces équivalente à la surface S du triangle ABC, nous avons entre les variables d, d', d'' la relation

$$ad + bd' + cd'' = 2S.$$

La fonction à rendre minimum est la somme

$$d^2 + d'^2 + d''^2.$$

Nous pouvons multiplier cette fonction par la quantité constante $a^2 + b^2 + c^2$ et écrire, d'après l'identité de Lagrange,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + d'^2 + d''^2) = (ad + bd' + cd'')^2 + (ad' - bd)^2 + (bd'' - cd'')^2 + (cd - ad'')^2.$$

Le premier terme du second membre est constant; les trois autres sont des carrés variables; le minimum de leur somme a lieu quand ils sont tous trois nuls, ce qui donne

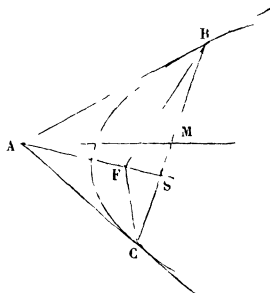
$$\frac{d}{a} = \frac{d'}{b} = \frac{d''}{c}.$$

Cette relation définit, d'après le corollaire du théorème II (n° 5), le point de rencontre de trois symédianes. Donc :

14. THÉORÈME. — *Le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés d'un triangle est minimum est le point de concours des trois symédianes de ce triangle.*

15. THÉORÈMES SUR LA PARABOLE. — *La droite qui joint le point de concours de deux tangentes à une*

Fig. 2.



parabole au foyer de cette parabole est symédiane

du triangle formé par les deux tangentes et la corde de contact (fig. 2).

Soient les tangentes AB et AC. Joignons les points A, B et C au foyer F; AF coupe BC au point S. Tirons AM parallèle à l'axe de la parabole. D'après un théorème bien connu, les angles BAM et CAF sont égaux, et, comme AM passe par le milieu M de BC, AS est la symédiane du triangle ABC.

16. COROLLAIRE I. — Appliquant au point F de la symédiane AS le théorème II (n° 4), nous avons ce théorème :

Les distances du foyer F aux deux tangentes AB et AC sont proportionnelles aux longueurs de ces tangentes.

17. COROLLAIRE II. — Appliquons maintenant le théorème III (§ 6); il donne

$$\frac{BS}{CS} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Mais on sait que AF est bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$; donc

$$\frac{BS}{CS} = \frac{BF}{CF}$$

et, par suite,

$$\frac{BF}{CF} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Les distances du foyer aux points de contact sont proportionnelles aux carrés des longueurs des tangentes.

18. Remarque. — Les angles $\widehat{ABF}$ et $\widehat{BAM}$ sont

égaux, ainsi que $\widehat{ACF}$ et $\widehat{CAM}$. On est ainsi conduit à une propriété de la symédiane que je proposerai de rechercher directement (*Exercices, IV*).

19. THÉORÈMES SUR LA LEMNISCATE. — *La normale à la lemniscate est symédiane du triangle formé par les rayons vecteurs et l'axe polaire.*

L'équation de la courbe rapportée à ses pôles étant $\rho \rho_1 = K$, les dérivées par rapport à ρ et ρ_1 sont ρ_1 et ρ . D'après cela, on aura la normale en portant ρ sur ρ_1 , ρ_1 sur ρ et composant ces longueurs comme des forces, ce qui rentre dans la construction de la symédiane donnée théorème I (§ 3).

20. Sur la ligne des pôles comme diamètre, décrivons une circonférence; aux quatre points de rencontre de la lemniscate et de cette circonférence, d'après le théorème précédent et le corollaire I du théorème III (§ 7), la normale sera perpendiculaire à l'axe polaire; donc :

Les points de la lemniscate où la tangente est parallèle à l'axe polaire sont sur la circonférence décrite sur la ligne des pôles comme diamètre ⁽¹⁾.

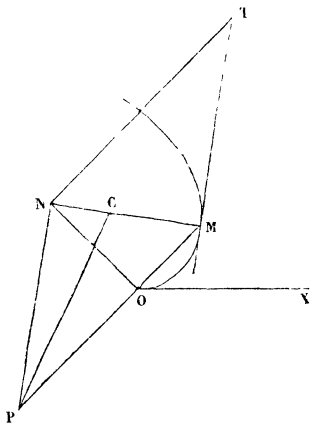
21. Remarque. — Si l'on compare le tracé qui vient d'être indiqué, pour la normale à la lemniscate, à la construction de la tangente à cette courbe, qui résulte de la méthode de Roberval, on est conduit à une propriété de la symédiane bien facile à démontrer directement (*Exercices, I*).

(¹) Je crois avoir énoncé ce théorème pour la première fois dans les *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XX, p. 200. M. Barbarin l'a depuis démontré d'une autre façon (3^e série, t. I, p. 27).

22. THÉORÈME SUR LA SPIRALE D'ARCHIMÈDE. — *Par le point de rencontre du rayon vecteur et de la parallèle à la tangente menée par l'extrémité de la sous-normale, tirons la symédiane du triangle formé par ces droites et la normale. La droite ainsi menée passe par le centre de courbure ⁽¹⁾ (fig. 3).*

Soit C le centre de courbure, c'est-à-dire le point où MN touche son enveloppe. La sous-normale ON étant constante, NT parallèle à OM est tangente au cercle décrit par le point N. Dès lors, on a entre les déplace-

Fig. 3.



ments infiniment petits correspondants des points M et N,

$$\frac{d(M)}{d(N)} = \frac{MC \cdot MT}{NC \cdot NT}.$$

D'ailleurs, l'angle MON étant constant, et MN étant

(¹) Ce théorème a été aussi énoncé par nous, mais un peu différemment, et avec une autre démonstration (*Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XIX, p. 291).

normale à la courbe au point M, NO à celle du point N,
on a aussi

$$\frac{d(M)}{d(N)} = \frac{MN}{NO} = \frac{NT}{MT}.$$

Donc

$$\frac{MC.MT}{NC.NT} = \frac{NT}{MT}$$

ou

$$\frac{MC}{NC} = \frac{\overline{NT}^2}{\overline{MT}^2} = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{NP}^2},$$

ce qui, d'après le théorème III (§ 4), démontre que PC est symédiane du triangle MPN.

23. PROBLÈME SUR LES CONIQUES. — *Une droite variable se meut dans le plan d'une conique de façon que les tangentes à la conique aux points d'intersection avec la droite se coupent sous un angle constant. Déterminer le point où cette droite touche son enveloppe.*

Soient A et B les points d'intersection de la droite et de la conique. Les tangentes à la conique en ces points se coupent au point T. La droite AB touche son enveloppe au point E. On a entre les déplacements infiniment petits correspondants des points A et B la relation

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{AE.AT}{BE.BT}.$$

D'ailleurs, R et R' étant les rayons de courbure aux points A et B, $d\theta$ et $d\theta'$ les angles de contingence correspondants, on a

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{R}{R'} \frac{d\theta}{d\theta'}.$$

Mais, l'angle ATB étant constant, $d\theta = d\theta'$; par suite,

$$\frac{AE.AT}{BE.BT} = \frac{R}{R'}.$$

Or, d'après un théorème connu,

$$\frac{R}{R'} = \frac{\overline{AT}^3}{\overline{BT}^3};$$

donc

$$\frac{AE \cdot AT}{BE \cdot BT} = \frac{\overline{AT}^3}{\overline{BT}^3},$$

ou

$$\frac{AE}{BE} = \frac{\overline{AT}^2}{\overline{BT}^2},$$

ce qui, d'après le théorème III, fait voir que *la droite TE est symédiane dans le triangle ATB.*

24. Dans le cas où l'angle constant $\widehat{ATB}$ est droit, TE est perpendiculaire sur AB. Donc, en appelant C le cercle tel que de chacun de ses points on voie la conique K sous un angle droit, nous avons ce théorème :

Le point de la polaire réciproque de C par rapport à K correspondant à un point M, pris sur C, s'obtient en abaissant du point M une perpendiculaire sur sa polaire prise par rapport à K.

25. PROBLÈME SUR LES CONIQUES. — *Étant donné le centre de courbure en un point quelconque d'une conique, en déduire le centre de courbure en tout autre point de cette conique.*

Les tangentes à la conique aux points a et b se coupent au point t ; α et β sont les centres de courbure correspondant à ces points; ts étant symédiane du triangle atb , la perpendiculaire élevée à ab par le point s coupe en a' et b' les normales $a\alpha$ et $b\beta$.

D'après un théorème connu, nous avons

$$\frac{ax}{b\beta} = \frac{at^3}{bt^3}$$

ou, en vertu du théorème V (§ 10),

$$\frac{ax}{b\beta} = \frac{aa'}{bb'}.$$

Des points α et β abaissons sur ab les perpendiculaires $\alpha\alpha_1$ et $\beta\beta_1$; nous aurons

$$\frac{ax_1}{b\beta_1} = \frac{as}{bs};$$

par suite, les parallèles α_1u et β_1u à at et à bt se coupent au point u sur la symédiane st ; cela donne le théorème suivant, qui résout la question :

Les parallèles aux tangentes menées par les projections des centres de courbure sur la corde de contact se coupent sur la symédiane du triangle formé par ces tangentes et la corde de contact.

26. Si nous rapprochons la construction donnée au § 23 du théorème énoncé au § 15, nous obtenons le théorème suivant :

K étant une courbe telle que de chacun de ses points on voie la parabole P sous un angle constant, K' la polaire réciproque de K par rapport à P, toute droite qui joint deux points correspondants de K et K' passe par le foyer de P.

On voit, par les applications qui précèdent, que la symédiane joue un rôle utile dans des questions intéressantes et de genres très divers. C'est ce qui me fait

espérer qu'on voudra bien désormais la prendre en considération, en lui conservant un nom absolument nécessaire quand il s'agit d'énoncer les théorèmes nombreux où elle figure.

EXERCICES SUR LA SYMÉDIANE.

I. On prolonge le côté AB du triangle ABC d'une longueur égale AB'; en B' et en C on élève respectivement à AB et à AC des perpendiculaires qui se coupent en I; AI est perpendiculaire à la symédiane issue du sommet A.

II. Les trois symédianes d'un triangle passent respectivement par les trois sommets du triangle formé par les côtés extérieurs des carrés construits sur les côtés du triangle donné.

III. Du milieu M de BC on abaisse les perpendiculaires MP et MQ sur AB et AC. La droite PQ qui joint les pieds de ces perpendiculaires est perpendiculaire sur la symédiane issue du sommet A.

IV. AM étant médiane du triangle ABC, on prend un point P tel que $\widehat{PBA} = \widehat{MAB}$ et $\widehat{PCA} = \widehat{MAC}$. Le point P est sur la symédiane issue du sommet A.

V. Les trois symédianes d'un triangle passent respectivement par les trois sommets du triangle polaire réciproque de ce triangle par rapport à son cercle circonscrit.

VI. Le point de rencontre des symédianes est le centre de gravité du triangle formé par les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois côtés du triangle donné.

VII. Les points H et K étant les pieds des perpendiculaires abaissées des points B et C sur la bissectrice issue du sommet A, on mène par le point H une parallèle à AB et par le point K une parallèle à AC. Ces droites se coupent au point I. Démontrer que le point I est sur la symédiane issue de A.

Note. — Les solutions de ces questions seront insérées dans les *Nouvelles Annales*.