

ERNEST CESÁRO

Démonstration élémentaire de la formule de Stirling

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 43-46

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__43_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE DE STIRLING;

PAR M. ERNEST CESARO.

I. Considérons l'expression

$$\varphi_n = \sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right)^5 \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n-1}};$$

on la transforme aisément en

$$\varphi_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{1.2.3\dots n},$$

d'où

$$(1) \quad 1.2.3\dots n = \frac{1}{\varphi_n} n^{n+\frac{1}{2}}.$$

II. Calculons φ_n . Nous avons

$$l\varphi_n = \frac{3}{2} l\frac{2}{1} + \frac{5}{2} l\frac{3}{2} + \frac{7}{2} l\frac{4}{3} + \dots + \frac{2n-1}{2} l\frac{n}{n-1}.$$

Or

$$l \frac{n}{n-1} = \frac{2}{1} \frac{1}{2n-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{(2n-1)^3} + \frac{2}{5} \frac{1}{(2n-1)^5} + \dots,$$

et, par suite,

$$\frac{2n-1}{2} l \frac{n}{n-1} = 1 + u_{n-1},$$

si l'on pose

$$u_{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n-1)^4} + \dots$$

Donc

$$(2) \quad l \varphi_n = n-1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) = n-1 + S_{n-1}.$$

III. Afin de calculer S_{n-1} , étudions la série

$$u_1 + u_2 + u_3 \dots$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n-1} &< \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^4} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

On obtient, par addition,

$$S_{n-1} < \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Donc S_{n-1} tend vers une limite S , inférieure à $\frac{1}{12}$. Les termes étant positifs, on a

$$(3) \quad S_{n-1} < S.$$

On obtient de même

$$S - S_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \dots < \frac{1}{12n},$$

d'où

$$(4) \quad S_{n-1} > S - \frac{1}{12n}.$$

Des inégalités (3) et (4) il résulte que l'on peut poser

$$S_{n-1} = S - \frac{\theta}{12n},$$

θ étant compris entre 0 et 1.

IV. L'égalité (2) devient

$$l_{\varphi_n} = n - 1 + S - \frac{\theta}{12n}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{\varphi_n} = e^{1-S} e^{-n + \frac{\theta}{12n}}.$$

Substituant dans (1), on obtient

$$(5) \quad 1.2.3 \dots n = C n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n + \frac{\theta}{12n}},$$

C étant la constante e^{1-S} à déterminer.

V. Soit

$$f(n) = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \frac{8}{7} \dots \frac{2n}{2n-1}.$$

Une transformation facile donne

$$f(n) = \frac{2^{4n-1}}{n} \left[\frac{(1.2.3 \dots n)^2}{1.2.3 \dots 2n} \right]^2.$$

Or, d'après la formule (5),

$$(1.2.3 \dots n)^2 = C^2 n^{2n+1} e^{-2n + \frac{\theta}{6n}},$$

$$1.2.3 \dots 2n = C (2n)^{2n + \frac{1}{2}} e^{-2n + \frac{\theta}{24n}}.$$

Donc

$$f(n) = \frac{C^2}{4} e^{\frac{4\theta - \theta}{12n}},$$

θ' étant, comme θ , une fraction proprement dite.

Si n augmente indéfiniment

$$f(\infty) = \frac{C^2}{4}.$$

Mais, d'après la formule de Wallis,

$$f(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent $C = \sqrt{2\pi}$.

VI. Donc, enfin,

$$(6) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n + \frac{1}{12n}}.$$