

J. BOURGET

## **Note sur les permutations de $n$ objets et sur leur classement**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1883), p. 433-450

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1883\\_3\\_2\\_433\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_433_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## NOTE SUR LES PERMUTATIONS DE $n$ OBJETS ET SUR LEUR CLASSEMENT;

PAR M. J. BOURGET.

1. On peut classer de diverses manières les permutations en nombre  $P_n$  de  $n$  objets numérotés

1   2   3   4   ...    $n$ .

J'ai fait connaître en 1871, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, un premier mode de classification: c'est celui qui résulte du procédé classique employé pour les former et en compter le nombre. J'en ai indiqué un autre plus commode dans le journal de *Mathématiques élémentaires* (année 1881). Ces deux modes de classification permettent tous deux de résoudre facilement les deux problèmes suivants :

1° *Trouver directement et isolément une permutation de rang donné;*

2° *Trouver le rang occupé par une permutation donnée dans la classification adoptée.*

Mais aucune des deux ne permet de trouver la *formule* du rang occupé par un élément déterminé dans la permutation de rang donné  $\rho$ .

Je propose dans cette Note un nouveau mode de classification des permutations, différent des deux précédents, qui conduit facilement à la solution de ce problème difficile. Ce nouveau mode de classification consiste essentiellement dans le partage des permutations en groupes de permutations circulaires.

2. Considérons, par exemple, une permutation de six

( 434 )

objets

2 4 6 1 3 5.

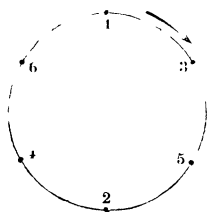
Plaçons le dernier objet au commencement, nous aurons

5 2 4 6 1 3,

puis opérons de même sur ce résultat, nous obtiendrons le tableau des permutations suivantes :

|   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|----|
| 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5  |
| 5 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3  |
| 3 | 5 | 2 | 4 | 6 | 1  |
| 1 | 3 | 5 | 2 | 4 | 6  |
| 6 | 1 | 3 | 5 | 2 | 4  |
| 4 | 6 | 1 | 3 | 5 | 2  |
| 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5. |

On voit qu'après la sixième permutation on retombe sur la première et tout recommence dans le même ordre. Ces diverses permutations sont dites *circulaires*, parce que, si les objets sont placés sur une circonférence dans



le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, on obtient les divers résultats du Tableau précédent en lisant, dans le sens indiqué, les nombres placés sur la circonférence et en changeant chaque fois d'origine, par une rétrogradation d'un rang par rapport à l'origine de la lecture précédente.

3. THÉORÈME I. — *Toute permutation de  $n$  éléments fait partie d'un groupe de permutations circulaires et la première permutation du groupe peut être celle qui commence par 1.*

Ce théorème est évident, d'après ce que nous venons de dire.

4. THÉORÈME II. — *Chaque groupe de permutations circulaires de  $n$  éléments contient  $n$  permutations.*

En effet, si l'on suppose les objets écrits sur un cercle, chacun des  $n$  objets sera pris successivement comme origine.

5. THÉORÈME III. — *Dans le nombre  $P_n$  des permutations de  $n$  objets, il y a autant de groupes de  $n$  permutations circulaires qu'il y a de permutations de  $n - 1$  objets.*

En effet, considérons l'un quelconque des types de permutations circulaires de  $n$  objets (permutation dont le premier objet est 1), dans lesquels se décompose le nombre total des permutations de  $n$  objets. L'ensemble des éléments qui suivent (1) constitue l'une des permutations de  $n - 1$  objets et il y aura autant de *types* de permutations de  $n$  objets qu'il y a de permutations différentes des  $(n - 1)$  objets (2, 3, 4, . . . ,  $n - 1$ ,  $n$ ), c'est-à-dire  $P_{n-1}$ . D'ailleurs, chaque permutation type donne  $n$  permutations différentes et circulaires : donc

$$P_n = n P_{n-1}.$$

On tire de là facilement

$$P_n = 1.2.3 \dots n.$$

Nous supposerons, pour faire image, que chacun des types de permutations de  $n$  objets soit écrit sur la circon-

férence d'un cercle. Nous aurons donc  $P_{n-1}$  cercles différents donnant les groupes de permutations circulaires dans lesquels on peut décomposer les permutations de  $n$  éléments. Nous les nommerons *cercles* (1).

6. *Corollaire.* — On classera les permutations des  $(n-1)$  éléments  $(2, 3, 4, \dots, n)$  comme on a classé les permutations de  $n$  éléments en groupes de permutations circulaires. Chaque groupe est donné par un *cercle* (2); il y a  $P_{n-2}$  cercles (2).

Les  $P_{n-2}$  permutations des  $n-2$  objets  $(3, 4, \dots, n)$  seront classées de la même manière en groupes de permutations circulaires donnés chacun par un *cercle* (3); il y aura  $P_{n-3}$  cercles (3), etc.

On arrivera ainsi à classer les permutations des trois objets  $(n-2, n-1, n)$  en groupes de permutations circulaires, donnés chacun par un *cercle*  $(n-2)$ ; il y aura deux cercles  $(n-2)$ .

Enfin, il n'y a qu'un *cercle*  $(n-1)$ ; car  $P_1 = 1$ . Il donnera les permutations des deux objets  $(n-1, n)$ .

7. PROBLÈME I. — *Former par ordre toutes les permutations de  $n$  objets.*

La classification précédente conduit à une solution très simple de ce problème.

1° Le cercle  $(n-1)$  donne les permutations des deux objets  $(n-1), n$ .

2° Pour former les  $P_2$  cercles  $n-2$ , nous plaçons successivement sur des cercles, à la suite de l'objet  $n-2$ , les permutations données par le cercle précédent.

3° Pour former les  $P_3$  cercles  $n-3$ , nous placerons successivement sur des cercles, à la suite de l'objet  $n-3$ , les permutations données par les cercles  $(n-2)$  précédents, etc.

Il n'est pas besoin d'ailleurs de se servir de cercles ; nous n'employons cette expression que pour faire image.

Les cercles (1) étant formés, nous aurons toutes les permutations classées par groupes de permutations circulaires.

8. EXEMPLE. — *Former toutes les permutations de quatre éléments.*

1° Le cercle (3) nous donne les deux permutations

$$3 \ 4 \ 4 \ 3.$$

2° Les deux cercles (2) sont donc (2 3 4), (2 4 3). Ils nous donnent les six permutations

$$\begin{array}{cc} 2 \ 3 \ 4 & 2 \ 4 \ 3 \\ 4 \ 2 \ 3 & 3 \ 2 \ 4 \\ 3 \ 4 \ 2 & 4 \ 3 \ 2 \end{array}$$

3° Les cercles (1) sont donc

$$\begin{array}{cc} 1 \ 2 \ 3 \ 4 & 1 \ 2 \ 4 \ 3 \\ 1 \ 4 \ 2 \ 3 & 1 \ 3 \ 2 \ 4 \\ 1 \ 3 \ 4 \ 2 & 1 \ 4 \ 3 \ 2. \end{array}$$

Ils nous donnent les permutations des quatre éléments rangés par ordre et par groupes de permutations circulaires

$$\begin{array}{cccccccc} 1 \ 2 \ 3 \ 4 & 1 \ 4 \ 2 \ 3 & 1 \ 3 \ 4 \ 2 & 1 \ 2 \ 4 \ 3 & 1 \ 3 \ 2 \ 4 & 1 \ 4 \ 3 \ 2 \\ 4 \ 1 \ 2 \ 3 & 3 \ 1 \ 4 \ 2 & 2 \ 1 \ 3 \ 4 & 3 \ 1 \ 2 \ 4 & 4 \ 1 \ 3 \ 2 & 2 \ 1 \ 4 \ 3 \\ 3 \ 4 \ 1 \ 2 & 2 \ 3 \ 1 \ 4 & 4 \ 2 \ 1 \ 3 & 4 \ 3 \ 1 \ 2 & 2 \ 4 \ 1 \ 3 & 3 \ 2 \ 1 \ 4 \\ 2 \ 3 \ 4 \ 1 & 4 \ 2 \ 3 \ 1 & 3 \ 4 \ 2 \ 1 & 2 \ 4 \ 3 \ 1 & 3 \ 2 \ 4 \ 1 & 4 \ 3 \ 2 \ 1. \end{array}$$

9. PROBLÈME II. — *Trouver une permutation de rang donné p dans ce mode de classification.*

Chaque cercle (1) donne  $n$  permutations ; si donc nous

divisons  $\rho$  par  $n$ , ce qui donnera

$$\rho = nQ_n + R_n,$$

nous en concluons que la  $\rho^{\text{ième}}$  permutation est donnée par le cercle (1) de rang  $Q_n + 1$ , et qu'elle est la  $R_n^e$  de ce cercle.

Mais, pour que cette conclusion soit générale, il faut faire la division de manière que  $R_n$  ne soit jamais nul.  $R_n$  peut donc prendre l'une quelconque des valeurs (1, 2, 3, ...  $n$ ), mais il ne peut pas être zéro.  $Q_n$  peut être nul. En effet, supposons que  $\rho$  contienne  $n$  exactement, nous poserons

$$\rho = nQ_n + n.$$

La permutation de rang  $\rho$  se trouvera bien dans le cercle (1) de rang  $Q_n + 1$  et elle sera bien la  $n^{\text{ième}}$  de ce cercle. La règle donnée précédemment est conservée; elle ne le serait pas, si nous avions fait la division avec le reste zéro.

Nous voilà ramenés à trouver le cercle (1) de rang  $Q_n + 1$ . Mais ce rang n'est pas autre chose que celui de la permutation des  $n - 1$  éléments (2, 3, ...  $n$ ) qu'il faut placer à la suite de (1) pour former le cercle (1) en question. Nous opérerons donc sur  $Q_n + 1$  comme nous avons opéré sur  $\rho$ , et nous poserons

$$Q_n + 1 = (n - 1)Q_{n-1} + R_{n-1},$$

$R_{n-1}$  étant l'un des nombres (1, 2, ...  $n - 1$ ).

Cette égalité nous montre que la permutation de rang  $Q_n + 1$  des  $n - 1$  éléments (2, 3, ...,  $n$ ) est donnée par le cercle (2) de rang  $Q_{n-1} + 1$  et qu'elle est la  $R_{n-1}^e$  de ce cercle.

Nous sommes ainsi ramenés à trouver le cercle (2) de rang  $Q_{n-1} + 1$ . Or ce rang est celui de la permutation des  $n - 2$  éléments (3, 4, ...  $n$ ) qu'il faut placer à la suite

de (2) pour former le cercle (2) en question. Nous opérerons donc sur  $Q_{n-1} + 1$  comme sur  $\rho$  et nous poserons

$$Q_{n-1} + 1 = (n-2)Q_{n-2} + R_{n-2}.$$

En raisonnant toujours de la même manière, nous aurons les égalités successives

$$Q_{n-2} + 1 = (n-3)Q_{n-3} + R_{n-3},$$

$$Q_{n-3} + 1 = (n-4)Q_{n-4} + R_{n-4},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$Q_3 + 1 = 2Q_2 + R_2,$$

$R_2$  n'étant pas nul, mais égal à l'un des nombres 1, 2.

Cette dernière égalité nous apprend que la permutation à prendre des deux éléments  $(n-1, n)$  de rang  $Q_3 + 1$  est donnée par le cercle  $(n-1)$  de rang  $Q_2 + 1$ , et qu'elle est la  $R_2^c$  de ce cercle. Comme il n'y a qu'un cercle  $n-1$ , il faut que  $Q_2 + 1 = 1$  : donc  $Q_2 = 0$ .

Nous poserons enfin, pour la symétrie,

$$Q_2 + 1 = 1 \cdot Q_1 + R_1,$$

et l'on aura  $R_1 = 1$ . D'ailleurs,  $Q_2$  étant nul,  $Q_1$  est nul aussi.

Après ce travail préparatoire, on a la permutation des deux éléments  $(n-1, n)$  qu'il faut connaître pour former le cercle  $(n-2)$  dont on a besoin. Après avoir formé ce cercle,  $R_3$  fait connaître la permutation circulaire qu'il faut prendre pour former le cercle  $(n-3)$ . Après avoir formé ce cercle, le reste  $R_4$  nous apprend la permutation circulaire à prendre pour former le cercle suivant  $(n-4)$ , etc.

Enfin nous formons le cercle  $(1)$ , et le reste  $R_n$  nous apprend quelle est la permutation cherchée dans ce cercle.

10. EXEMPLE. — *Trouver la cinq cent cinquante-cinquième permutation des six éléments (1, 2, 3, 4, 5, 6).*

Nous obtenons dans ce cas

|            |                   |
|------------|-------------------|
| Cercle (1) | $555 = 6.92 + 3,$ |
| » (2)      | $93 = 5.18 + 3,$  |
| » (3)      | $19 = 4.4 + 3,$   |
| » (4)      | $5 = 3.1 + 2,$    |
| » (5)      | $2 = 2.0 + 2,$    |
|            | $1 = 1.0 + 1.$    |

1° Dans le cercle (5), qui est (56), je prends la deuxième permutation 65;

2° Le cercle (4) sera (465); je prends la deuxième permutation (546);

3° Le cercle (3) sera  $\frac{(3546)}{1}$ ; je prends la troisième permutation  $\frac{(4635)}{2}$ ;

4° Le cercle (2) sera (24635); je prends la troisième permutation (35246);

5° Le cercle (1) sera (135246); je prends la troisième permutation

$$4 \ 6 \ 1 \ 3 \ 5 \ 2$$

et j'ai la cinq cent cinquante-cinquième permutation demandée.

11. PROBLÈME III. — *Trouver la formule du rang de chaque élément dans la permutation de rang  $\rho$ .*

Ce problème paraît inextricable avec les deux autres modes de classification que j'ai donnés; on peut le résoudre facilement comme il suit dans le nouveau mode.

1° Le dernier reste  $R_1 = 1$  indique (ce qui est évident) que l'élément  $n$  occupe le rang 1 dans la permutation unique qu'il forme;

2° Nous formons le cercle  $(n - 1)$  en plaçant cet élé-

ment  $n$  à la suite de  $n-1$  : nous obtenons  $(n-1)n$ . On voit que

|                                     |             |
|-------------------------------------|-------------|
| L'élément $n-1$ a pris le rang..... | 1           |
| » $n$ »                      .....  | $R_1 + 1$ . |

Puis nous prenons la  $R_2^e$  permutation circulaire; le rang de chaque élément augmente de  $R_2-1$  unités; donc

|                                      |               |
|--------------------------------------|---------------|
| L'élément $n-1$ prendra le rang..... | $R_2$         |
| » $n$ »                      .....   | $R_1 + R_2$ . |

Mais le dernier élément  $n$  de la permutation type  $(n-1)n$  ne peut pas augmenter de rang; en d'autres termes, cette augmentation revient à son passage au premier rang. Si donc on trouve  $R_1 + R_2$  supérieur à 2, on devra ôter 2 et le reste indiquera sa place au premier rang.

3° Plaçons la permutation formée des deux éléments  $(n-1, n)$  à la suite de  $(n-2)$ ; nous formerons le cercle  $n-2$ , et dans ce cercle

|                                                       |                   |
|-------------------------------------------------------|-------------------|
| n-2 occupera le rang.....                             | 1                 |
| n-1                      »                      ..... | $R_2 + 1$         |
| n                      »                      .....   | $R_1 + R_2 + 1$ . |

Prenons maintenant la  $R_3^e$  permutation que donne ce cercle; le rang de chaque élément augmentera de  $R_3-1$  et après cela

|                                                       |                     |
|-------------------------------------------------------|---------------------|
| n-2 aura le rang.....                                 | $R_3$               |
| n-1                      »                      ..... | $R_2 + R_3$         |
| n                      »                      .....   | $R_1 + R_2 + R_3$ . |

Mais aucun de ces éléments ne peut avoir un rang supérieur à 3. Or,  $R_3$  étant au plus 3, il n'y a aucune correction à faire à la première formule.  $R_2 + R_3$  ne peut pas surpasser 5, mais il peut surpasser 3 : on retranchera 3 si cela a lieu.  $R_1 + R_2$  doit être diminué de 2,

s'il y a lieu ;  $R_1 + R_2 + R_3$  ne peut pas surpasser 5, mais peut surpasser 3 : on le diminuera de 3, s'il y a lieu. En général, dans le calcul de la somme des restes, on diminue, s'il y a lieu, chaque fois une somme trouvée de l'indice du dernier reste employé.

4° Plaçons la permutation formée des trois éléments  $(n-2, n-1, n)$  à la suite de  $(n-3)$ ; nous formerons le cercle  $(n-3)$ , et dans ce cercle

|       |                       |                       |
|-------|-----------------------|-----------------------|
| $n-3$ | occupera le rang..... | 1                     |
| $n-2$ | » .....               | $R_3 + 1$             |
| $n-1$ | » .....               | $R_2 + R_3 + 1$       |
| $n$   | » .....               | $R_1 + R_2 + R_3 + 1$ |

Nous prenons dans ce cercle la  $R_1^e$  permutation circulaire. Le rang de chaque élément augmente de  $R_1 - 1$ , sans pouvoir surpasser 4; dans cette permutation nouvelle

|       |                       |                         |
|-------|-----------------------|-------------------------|
| $n-3$ | occupera le rang..... | $R_4$                   |
| $n-2$ | » .....               | $R_3 + R_4$             |
| $n-1$ | » .....               | $R_2 + R_3 + R_4$       |
| $n$   | » .....               | $R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ |

On calculera ces sommes avec les précautions que j'ai indiquées précédemment.

La loi est évidente; nous trouverons donc que, dans la permutation de rang  $p$ ,

|       |                    |                                                         |
|-------|--------------------|---------------------------------------------------------|
| 1     | occupera le rang.. | $R_n$                                                   |
| 2     | » ..               | $R_{n-1} + R_n$                                         |
| 3     | » ..               | $R_{n-2} + R_{n-1} + R_n$                               |
| 4     | » ..               | $R_{n-3} + R_{n-2} + R_{n-1} + R_n$                     |
| ..... | .....              | .....                                                   |
| $n$   | » ..               | $R_1 + R_2 + \dots + R_{n-3} + R_{n-2} + R_{n-1} + R_n$ |

Nous n'oublierons pas que dans le calcul de ces diverses sommes les restes doivent être pris dans l'ordre des indices croissants et que, arrivé à un reste, si la somme ob-

tenue surpasse l'indice, on la diminue de cet indice avant de continuer.

12. EXEMPLE. — *Trouver le rang de chacun des six éléments dans la cinq cent cinquante-cinquième permutation de six éléments.*

Dans ce cas

$$R_6 = 3, \quad R_5 = 3, \quad R_4 = 3, \quad R_3 = 2, \quad R_2 = 2, \quad R_1 = 1.$$

Formons le tableau suivant :

|   |                  |       |                        |
|---|------------------|-------|------------------------|
| 1 | occupera le rang | ..... | 3                      |
| 2 | »                | ..... | 3 + 3                  |
| 3 | »                | ..... | 3 + 3 + 3              |
| 4 | »                | ..... | 2 + 3 + 3 + 3          |
| 5 | »                | ..... | 2 + 2 + 3 + 3 + 3      |
| 6 | »                | ..... | 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3. |

Puis, en exécutant les calculs avec les précautions indiquées ci-dessus, nous trouverons que

|   |                  |       |    |
|---|------------------|-------|----|
| 1 | occupera le rang | ..... | 3  |
| 2 | »                | ..... | 6  |
| 3 | »                | ..... | 4  |
| 4 | »                | ..... | 1  |
| 5 | »                | ..... | 5  |
| 6 | »                | ..... | 2. |

Donc la cinq cent cinquante-cinquième permutation demandée est

$$4 \quad 6 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad \text{c. Q. F. T.}$$

13. PROBLÈME IV. — *Étant donnée une permutation, trouver son rang dans la classification adoptée.*

Désignons par

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \dots, \quad A_n,$$

les rangs donnés occupés par les éléments

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots, \quad n.$$

Nous résoudrons les équations

$$\begin{aligned}
 R_n &= A_1, \\
 R_{n-1} + R_n &= A_2, \\
 R_{n-2} + R_{n-1} + R_n &= A_3, \\
 R_{n-3} + R_{n-2} + R_{n-1} + R_n &= A_4, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_{n-3} + R_{n-2} + R_{n-1} + R_n &= A_n.
 \end{aligned}$$

Nous en déduirons les divers restes  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Dans cette résolution, il faudra remarquer que chaque reste est positif, différent de zéro et au plus égal à son indice. Les soustractions successives auxquelles on sera conduit devront s'effectuer toutes : on ajoutera donc l'indice si cela est nécessaire, et cela sera nécessaire si le résultat trouvé est négatif. On n'oubliera pas, pour se guider dans les calculs, qu'on fait ici l'opération inverse de celle qui a été indiquée dans le problème précédent.

Les restes successifs  $R_n, R_{n-1}, \dots, R_2, R_1$  étant trouvés, on pourra en déduire les quotients successifs et par suite  $\rho$ , au moyen des équations

$$\begin{aligned}
 \rho &= n Q_n + R_n, \\
 Q_n &= (n-1) Q_{n-1} + R_{n-1} - 1, \\
 Q_{n-1} &= (n-2) Q_{n-2} + R_{n-2} - 1, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 Q_3 &= 2 Q_2 + R_2 - 1, \\
 Q_2 &= 1 Q_1 + R_1 - 1.
 \end{aligned}$$

De ces formules, on peut d'ailleurs, si l'on veut, tirer  $\rho$  en fonction des restes. On obtient

$$\begin{aligned}
 \rho &= R_n + n(R_{n-1} - 1) \\
 &\quad + n(n-1)(R_{n-2} - 1) + n(n-1)(n-2)(R_{n-3} - 1) + \dots \\
 &\quad + n(n-1)(n-2) \dots 3(R_2 - 1).
 \end{aligned}$$

**14. EXEMPLE.** — *Trouver le rang de la permutation de six éléments 4, 6, 1, 3, 5, 2.*

Nous avons à résoudre les équations

$$\begin{aligned} R_6 &= 3, \\ R_5 + R_6 &= 6, \\ R_4 + R_5 + R_6 &= 4, \\ R_3 + R_4 + R_5 + R_6 &= 1, \\ R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 &= 5, \\ R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 &= 2. \end{aligned}$$

Nous en concluons

$$\begin{aligned} R_6 &= 3, \\ R_5 &= 3, \\ R_4 &= 3, \\ R_3 &= 2, \\ R_2 &= 2, \\ R_1 &= 1, \end{aligned}$$

d'où

$$\rho = 3 + 6.2 + 6.5.2 + 6.5.4.1 + 6.5.4.3.1 = 555.$$

C. Q. F. T.

**15. THÉORÈME IV.** — *Deux systèmes de restes conjugués donnent deux permutations conjuguées à égale distance des extrêmes.*

Le reste  $R_p$  est l'un des nombres  $1, 2, 3, \dots, p-2, p-1, p$ . Deux de ces nombres à égale distance des nombres extrêmes  $1, p$  se nomment *conjugués*. Donc, si  $R'_p$  représente le reste conjugué de  $R_p$ , on aura

$$R_p + R'_p = p + 1.$$

Soit un système de restes

$$R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_3, R_2;$$

le rang  $\rho$  de la permutation correspondante sera

$$\begin{aligned} \rho &= R_n + n(R_{n-1} - 1) \\ &\quad + n(n-1)(R_{n-2} - 1) + \dots + n(n-1)(n-2) \dots 4.3(R_2 - 1). \end{aligned}$$

Prenons les restes conjugués

$$R'_n, R'_{n-1}, R'_{n-2}, \dots, R'_3, R'_2;$$

le rang  $\rho'$  de la permutation correspondante sera

$$\rho' = R'_n + n(R'_{n-1} - 1) + n(n-1)(R'_{n-2} - 1) + \dots \\ + n(n-1)(n-2) \dots 4.3(R'_2 - 1),$$

ou bien

$$\rho' = 1 + n - R_n + n[n - R_{n-1} - 1] + n(n-1)[n-1 - R_{n-2} - 1] + \dots \\ + n(n-1)(n-2) \dots 4.3[3 - R_2 - 1] \\ = 1 + n + n(n-1-1) + n(n-1)(n-2-1) + \dots \\ + n(n-1)(n-2) \dots 4.3(2-1) \\ - [R_n + n(R_{n-1} - 1) + n(n-1)(R_{n-2} - 1) + \dots \\ + n(n-1)(n-2) \dots 4.3(R_2 - 1)].$$

Mais on a l'identité

$$n + n(\overline{n-1-1}) + n(n-1)(\overline{n-2-1}) \\ + n(n-1)(n-2)(\overline{n-3-1}) + \dots \\ + n(n-1) \dots 4.3(2-1) = 1.2.3 \dots n,$$

donc

$$\rho' = 1 + 1.2.3 \dots n - \rho$$

ou bien

$$\rho + \rho' = 1 + 1.2.3 \dots n,$$

ce qui prouve que les deux permutations obtenues par deux systèmes de restes conjugués sont à égale distance des extrêmes dans notre classification.

**16. THÉORÈME V.** — *Deux permutations conjuguées à égale distance des extrêmes ont leurs éléments disposés en ordre inverse, ou, ce qui est la même chose, ont leurs éléments de même rang conjugués.*

En effet, la formule de l'élément quelconque  $n+1-p$  dans la permutation conjuguée d'une première est donnée par la somme

$$R'_p + R'_{p+1} + R'_{p+2} + R'_{p+3} + \dots + R'_n,$$

calculée avec les précautions indiquées au n° 13. Remplaçons  $R'_p, R'_{p+1}, \dots$  par leurs valeurs, nous aurons la formule

$$(p+1-R_p) + (p+2-R_{p+1}) + (p+3-R_{p+2}) \\ + (p+4-R_{p+3}) + \dots + (n+1-R_n).$$

Pour calculer cette expression, nous ajoutons les deux premières parenthèses. Si leur somme est inférieure à  $p+1$ , c'est que la somme  $R_p + R_{p+1}$  est supérieure à  $p+1$ ; dans ce cas, on peut mettre la somme de ces deux parenthèses sous la forme

$$p+2 - [R_p + R_{p+1} - (p+1)]$$

ou bien

$$p+2 - (\overline{R_p + R_{p+1}}),$$

le trait horizontal indiquant que cette somme est faite conformément aux règles suivies dans le n° 13. Si la somme des deux parenthèses est supérieure à  $p+1$ , il faut lui retrancher  $p+1$ , et dans ce cas elle se réduit à

$$p+2 - (\overline{R_p + R_{p+1}}),$$

car  $R_p + R_{p+1}$  sera au plus égal à  $p+1$ .

Ajoutons maintenant la troisième parenthèse. Si la somme est inférieure à  $p+2$ , c'est que  $\overline{R_p + R_{p+1}} + R_{p+2}$  est supérieure à  $p+2$  : donc

$$\overline{R_p + R_{p+1} + R_{p+2}} = \overline{R_p + R_{p+1}} + R_{p+2} - (p+2).$$

D'ailleurs on a

$$p+2 - (\overline{R_p + R_{p+1}}) + (p+3 - R_{p+2}) \\ = p+3 - [\overline{R_p + R_{p+1}} + R_{p+2} - (p+2)] :$$

donc

$$(p+1-R_p) + (p+2-R_{p+1}) + (p+3-R_{p+2}) \\ = p+3 - [\overline{R_p + R_{p+1}} - R_{p+2}].$$

Si, en ajoutant la troisième parenthèse, nous obtenons une somme supérieure à  $p+2$ , il faut retrancher  $p+2$

et il nous reste finalement encore

$$p + 3 - [\overline{R_p + R_{p+1} + R_{p+2}}].$$

En continuant à raisonner de la même manière, nous arrivons enfin, pour la formule du rang de l'élément  $n + 1 - p$ , à

$$n + 1 - [\overline{R_p + R_{p+1} + \dots + R_n}].$$

Donc l'élément  $n + 1 - p$ , qui occupait dans la première permutation le rang

$$\overline{R_p + R_{p+1} + \dots + R_n},$$

occupera le rang

$$n + 1 - [\overline{R_p + R_{p+1} + \dots + R_n}].$$

Ces deux places sont également éloignées des places extrêmes.

Il résulte de là que la permutation conjuguée n'est pas autre chose que la première lue en ordre inverse de droite à gauche.

On peut vérifier ce résultat sur l'ensemble des permutations de quatre objets que nous avons formées. Le théorème que nous venons de démontrer réduit à moitié le nombre des opérations à faire pour former toutes les permutations de  $n$  éléments.

17. La solution du problème 14 nous montre que le calcul des diverses permutations dépend uniquement de la connaissance des restes

$$R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_3, R_2.$$

Or, nous savons que \*

|                            |   |   |   |     |         |         |         |
|----------------------------|---|---|---|-----|---------|---------|---------|
| $R_n$ est l'un des nombres | 1 | 2 | 3 | ... | $n - 2$ | $n - 1$ | $n$     |
| $R_{n-1}$                  | » | 1 | 2 | 3   | ...     | $n - 2$ | $n - 1$ |
| $R_{n-2}$                  | » | 1 | 2 | 3   | ...     | $n - 2$ |         |
| .....                      |   |   |   |     |         |         |         |
| $R_3$                      | » | 1 | 2 | 3   |         |         |         |
| $R_2$                      | » | 1 | 2 |     |         |         |         |

Si donc nous faisons par ordre toutes les combinaisons possibles de ces divers éléments, nous aurons toutes les permutations des  $n$  éléments, au moyen des formules du n° 14. Mais ce procédé serait moins rapide que celui que nous avons indiqué au n° 7.

On peut se demander comment il faut associer les restes pour obtenir les diverses permutations dans l'ordre de notre classification. Voici le théorème qui fait connaître cet ordre.

18. THÉORÈME VI. — *Le tableau des restes étant formé*

|                 |                           |
|-----------------|---------------------------|
| $R_n$ .....     | 1 2 3 ... $n-2$ $n-1$ $n$ |
| $R_{n-1}$ ..... | 1 2 3 ... $n-2$ $n-1$     |
| $R_{n-2}$ ..... | 1 2 3 ... $n-2$           |
|                 | .....                     |
| $R_4$ .....     | 1 2 3 4                   |
| $R_3$ .....     | 1 2 3                     |
| $R_2$ .....     | 1 2                       |
| $R_1$ .....     | 1,                        |

*on prend d'abord les deux dernières lignes, et l'on forme les associations successives (1, 1), (2, 1). Passant à la ligne précédente, on forme les associations*

$$(111), (211), (311), (121), (221), (321).$$

*Passant à la ligne suivante, on forme les associations*

$$\begin{aligned} & (1\ 1\ 1\ 1) \ (1\ 2\ 1\ 1) \ (1\ 3\ 1\ 1) \ (1\ 1\ 2\ 1) \ (1\ 2\ 2\ 1) \ (1\ 3\ 2\ 1) \\ & (2\ 1\ 1\ 1) \ (2\ 2\ 1\ 1) \ (2\ 3\ 1\ 1) \ (2\ 1\ 2\ 1) \ (2\ 2\ 2\ 1) \ (2\ 3\ 2\ 1) \\ & (3\ 1\ 1\ 1) \ (3\ 2\ 1\ 1) \ (3\ 3\ 1\ 1) \ (3\ 1\ 2\ 1) \ (3\ 2\ 2\ 1) \ (3\ 3\ 2\ 1) \\ & (4\ 1\ 1\ 1) \ (4\ 2\ 1\ 1) \ (4\ 3\ 1\ 1) \ (4\ 1\ 2\ 1) \ (4\ 2\ 2\ 1) \ (4\ 3\ 2\ 1). \end{aligned}$$

*Passant à la ligne suivante, on associe chacun des nombres de cette ligne successivement avec chacun des résultats précédents, et ainsi de suite.*

*Les associations finales donneront les groupements des restes classés de façon à fournir les permutations successives de notre classification.*

En effet, si ce théorème est vrai pour  $p$  objets, il est vrai pour  $p + 1$ ; car les nouveaux restes  $1, 2, 3, \dots, p + 1$  indiquent d'après nos formules le rang du  $(p + 1)^{\text{ième}}$  objet. Il faut donc que ces  $p + 1$  restes soient groupés successivement avec chacun des groupements obtenus pour  $p$  objets. Or le théorème est vrai évidemment pour deux objets; donc il est général.