

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 425-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_425_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1391

(voir 3^e série, t. I, p. 142) ;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Soit k la courbe enveloppée par une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes. Démontrer que toute courbe parallèle à k peut être engendrée de la même façon.

(LAGUERRE.)

AB de longueur constante, glissant entre OX et OY, enveloppe k . C étant le centre instantané de rotation, O, A, C, B sont sur une même circonférence de diamètre constant égal à $\frac{AB}{\sin XOY}$. La tangente correspondant à la courbe parallèle à k coupe cette circonférence en A' et B'. La distance de A'B' à AB étant constante, les arcs AA' et BB', et, par suite, les angles AOA' et BOB' sont constants; les droites OA' et OB' sont donc fixes. D'ailleurs

$$\frac{A'B'}{\sin A'OB'} = \frac{AB}{\sin XOY} = \text{const.}$$

Par conséquent A'B' a une longueur constante, et le théorème est démontré.

Note. — La même question a été résolue par M. J. Mister, professeur à l'École du Génie civil de Belgique.

Question 1396(voir 3^e série, t. I, p. 192);

PAR M. FRANÇOIS BORLETTI,
Ingénieur à Milan.

Intégrer l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - (1-2x)\frac{dy}{dx} + y(1-3x+x^2) = -x^2(1-x)^2.$$

(E. FAUQUEMBERGUE.)

L'équation caractéristique

$$x(1-x)r^2 - (1-2x)r + 1-3x+x^2 = 0,$$

correspondant à l'équation donnée dans laquelle on remplace le second membre par zéro, est satisfaite par

$$r = 1;$$

en conséquence, l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - (1-2x)\frac{dy}{dx} + y(1-3x+x^2) = 0$$

admettra l'intégrale particulière $y = e^x$.

Alors, si l'on fait

$$(1) \quad e^x \left(\frac{dy}{dx} - y \right) = z,$$

l'équation proposée devient

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} - \frac{1-2x}{x(1-x)} z = -e^x x(1-x).$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est

$$z = x(1-x)(C - e^x),$$

et, par l'équation (1), l'intégrale générale de l'équation

proposée devient

$$y = A e^x + B x^2 e^{-x} - x(1+x) - 1,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Charles Chabanel et Wladimir Habbé, à Odessa.

Question 1417

(voir 3^e série, t. I, p. 334) ;

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Le nombre p étant supposé premier, et les deux groupes,

$$r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$$

et

$$s_1, s_2, \dots, s_{p-1}$$

formant deux systèmes complets de résidus premiers par rapport au module p, il y a nécessairement deux indices différents i et k, tels que les produits $r_i s_i$ et $r_k s_k$ sont congrus par rapport au module p.

(A. HURWITZ.)

Chacun des groupes

$$r_1, r_2, \dots, r_{p-1},$$

$$s_1, s_2, \dots, s_{p-1}$$

est identique, à l'ordre près, au groupe

$$(1) \quad 1.2.3 \dots p-1,$$

qui contient les $p-1$ entiers premiers et inférieurs à p . Il s'ensuit que les trois produits

$$P = 1.2.3 \dots (p-1),$$

$$P' = r_1 r_2 \dots r_{p-1},$$

$$P'' = s_1 s_2 \dots s_{p-1}$$

sont égaux.

Soit t_i le résidu de $r_i s_i$ par rapport au module p , tout produit rs étant premier à p , chacun des $p - 1$ résidus

$$(2) \quad t_1, t_2, \dots, t_{p-1}$$

est égal à un entier du groupe (1). Nous avons maintenant à comparer ces résidus entre eux.

A cet effet, supposons que les entiers (2) soient distincts les uns des autres; le groupe qu'ils formeront sera alors identique, à l'ordre près, à celui (1), et leur produit sera égal à P . Or les produits

$$t_1 t_2 \dots t_{p-1}$$

et

$$r_1 s_1 \times r_2 s_2 \times \dots \times r_{p-1} s_{p-1}$$

sont congrus par rapport au module p , car tout facteur $r_i s_i$ du second produit est congru au facteur correspondant t_i du premier produit. L'hypothèse que nous avons faite a donc pour conséquence

$$P \equiv r_1 s_1 \times r_2 s_2 \times \dots \times r_{p-1} s_{p-1} \pmod{p},$$

ou

$$P \equiv r_1 r_2 \dots r_{p-1} \times s_1 s_2 \dots s_{p-1} \pmod{p},$$

ce qui donne

$$P \equiv P' P'' \pmod{p},$$

ou bien, à cause de $P = P' = P''$,

$$P^2 \equiv P \pmod{p}.$$

Mais le produit P est évidemment premier au module; cette congruence ne peut donc subsister sans que l'on ait

$$P \equiv -1 \pmod{p},$$

congruence impossible quand $p > 2$, car

$$1.2.3 \dots (p-1) + 1 \quad \text{ou} \quad P + 1$$

est divisible par le nombre premier p (théorème de Wilson), c'est-à-dire que

$$P \equiv -1 \pmod{p}.$$

Cette impossibilité prouve que les résidus (2) ne

peuvent pas être tous distincts les uns des autres : en conséquence, il y a nécessairement deux résidus qui sont égaux entre eux. Soient t_i et t_k ces résidus, on aura

$$r_i s_i \equiv r_k s_k \pmod{p}.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1429

(voir 3^e série, t. I, p. 528);

PAR M. L. B., à Angers.

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \right]^2 = 8 \frac{9}{8} \frac{24}{25} \frac{49}{48} \frac{80}{81} \frac{121}{120} \dots \quad (\text{CATALAN.})$$

On a (*Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 247)

$$\Gamma(n) = \lim \mu^n \frac{1.2.3\dots\mu}{n(n+1)(n+2)\dots(n+\mu)},$$

où μ est un nombre entier qui augmente indéfiniment.

On tire de là facilement

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 4^{\mu+1} \frac{1.2.3\dots\mu^{\frac{5}{4}}}{1.5.9.13\dots(4\mu+1)};$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 4^{\mu+1} \frac{1.2.3\dots\mu^{\frac{7}{4}}}{3.7.11.15\dots(4\mu+3)};$$

$$(1) \quad \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \right]^2 = \frac{3^2.7^2.11^2.15^2\dots(4\mu+3)^2}{1^2.5^2.9^2.13^2.17^2\dots(4\mu+1)^2\mu}.$$

Mais évidemment

$$1 = \frac{4.8.12\dots4(\mu-1)}{8.12.16\dots(4\mu)} \times \mu,$$

ou

$$(2) \quad 1 = \frac{(5-1)(9-1)\dots(4\mu-3-1)}{(7+1)(11+1)\dots(4\mu-1+1)} \times \mu,$$

quel que soit le nombre entier μ .

En multipliant le second membre de l'équation (2) par $\frac{5+1}{7-1} \cdot \frac{9+1}{11-1} \dots$, facteur évidemment égal à l'unité, on a

$$(3) \quad 1 = \frac{(5^2-1)(9^2-1)\dots[(4\mu-3)^2-1]}{(7^2-1)(11^2-1)\dots[(4\mu-1)^2-1]} \times \mu.$$

Si, enfin, je multiplie les équations (1) et (3) membre à membre, j'obtiendrai, en disposant convenablement les facteurs,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \right]^2 = \frac{3^2}{1^2} \frac{5^2-1}{5^2} \frac{7^2}{7^2-1} \frac{9^2-1}{9^2} \frac{11^2}{11^2-1} \dots$$

ou bien, en multipliant par $\frac{8}{8}$ pour la symétrie,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \right]^2 = 8 \frac{9}{8} \frac{24}{25} \frac{49}{48} \frac{80}{81} \frac{121}{120} \dots$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart et Cesaro.

Question 1459

(voir 2^e série, t. II, p. 336);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Le cube d'un nombre entier autre que l'unité ne peut être la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs.

Soit

$$(1) \quad y^3 = x^2 + (x+1)^2,$$

où x et y représentent des nombres entiers.

De l'équation (1) on déduit successivement

$$\begin{aligned} y^3 &= 2x^2 + 2x + 1, \\ 8y^3 &= 16x^2 + 16x + 8 = (4x+2)^2 + 4. \end{aligned}$$

et en posant

$$2y = Y \quad \text{et} \quad 4x + 2 = X,$$

il vient

$$Y^3 = X^2 + 4.$$

Mais il est démontré dans la *Théorie des nombres* de Legendre (3^e édition, 1830, t. II, p. 12) qu'une équation telle que

$$Y^3 = X^2 + 4$$

n'admet que les deux solutions entières

$$Y = 2, \quad X = 2 \quad \text{et} \quad Y = 5, \quad X = 11.$$

Par suite, les relations $2y = Y, 4x + 2 = X$ deviennent

$$2y = 2, \quad 4x + 2 = 2,$$

ou

$$2y = 5, \quad 4x + 2 = 11.$$

Le premier système donne

$$y = 1, \quad x = 0;$$

et le second, les valeurs fractionnaires

$$y = \frac{5}{2}, \quad x = \frac{9}{4}.$$

Donc l'équation

$$(1) \quad y^3 = x^2 + (x + 1)^2$$

ne peut être vérifiée, en nombres entiers, que par $y = 1$ et $x = 0$.

C. Q. F. D.