

E. BARISIEN

**Concours d'admission à l'École centrale  
(seconde session, 1882)**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1883), p. 415-420

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1883\\_3\\_2\\_415\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_415_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(SECONDE SESSION, 1882)

(voir même Tome, p. 92),

SOLUTION DE M. E. BARISIEN,

Lieutenant au 1<sup>er</sup> d'infanterie, à Dra-el-Mizan.

---

*On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires OX, OY et deux points H et H', le premier défini par ses coordonnées  $a, b$ ; le second symétrique du premier par rapport au point O.*

*Par ce dernier point, on mène une droite indéfinie*

DOE formant avec l'axe OX un angle  $\text{DOX} = \theta$ ; on projette les points H, H' sur cette droite en h, h'.

On projette le point h en u sur l'axe OX, et le point u en  $u_1$  sur la droite DOE.

On projette le point h' en v sur l'axe OY et le point v en  $v_1$  sur la droite DOE.

(Toutes ces projections sont orthogonales.)

Enfin, sur la longueur  $u_1 v_1$  comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle  $u_1 v_1 S$ , en menant  $v_1 S$  parallèle à OX et  $u_1 S$  parallèle à OY (<sup>1</sup>).

Cela posé, on demande :

1° De trouver les coordonnées du point S en fonction des trois constantes a, b,  $\theta$ ;

2° D'écrire l'équation d'une parabole ayant le point S pour sommet et la droite DOE pour directrice;

3° De démontrer que le lieu des foyers de toutes les paraboles obtenues en faisant varier l'angle  $\theta$  se compose du système de deux circonférences de cercle;

4° De démontrer que toutes ces paraboles sont tangentes aux axes de coordonnées;

5° De démontrer que les cordes de leurs contacts avec ces axes se croisent toutes en un même point.

1° Soient  $\alpha$  et  $\epsilon$  les coordonnées  $x, y$  du point S, et K la projection du point H sur l'axe OX.

Si nous projetons sur OD le contour OKHhO, il viendra, en posant  $Oh = r$ ,

$$r = a \cos \theta - b \sin \theta.$$

D'autre part,

$$\alpha = Ou_1 \cos \theta,$$

$$Ou_1 = Ou \cos \theta = r \cos^2 \theta,$$

$$Ou = Oh \cos \theta = r \cos \theta,$$

(<sup>1</sup>) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où

$$(1) \quad \alpha = r \cos^2 \theta.$$

De même

$$\beta = -Ov_1 \sin \theta = -Ov \sin^2 \theta,$$

$$(2) \quad \zeta = -r \sin^3 \theta.$$

En remplaçant dans les égalités (1) et (2)  $r$  par sa valeur

$$a \cos \theta + b \sin \theta,$$

on aura les coordonnées  $\alpha, \beta$  du point S, en fonction des trois constantes  $a, b, \theta$ .

2° Menons du point S la perpendiculaire Si à la droite DOE. La perpendiculaire Si sera l'axe de la parabole dont S est le sommet, et DOE la directrice. Le foyer F de la parabole s'obtiendra, en prenant sur le prolongement de l'axe iS, à partir du sommet S,  $SF = Si$ .

Soient  $x, y$  les coordonnées de i, et X, Y les coordonnées de F.

On aura

$$x = Oi \cos \theta \quad \text{et} \quad y = Oi \sin \theta.$$

Mais

$$\begin{aligned} Oi &= Ou_1 - u_1 v \\ &= r \cos^2 \theta - u_1 S. \sin \theta = r \cos^2 \theta - r(\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) \sin \theta, \end{aligned}$$

d'où

$$Oi = r \cos^2 \theta - r \sin^2 \theta = r \cos 2\theta.$$

Donc

$$(3) \quad x = r \cos 2\theta \cos \theta,$$

$$(4) \quad y = r \cos 2\theta \sin \theta.$$

Pour déterminer X et Y, nous avons les relations

$$2\alpha = X + x, \quad 2\beta = Y + y;$$

il s'ensuit

$$X = 2\alpha - x = 2r \cos^3 \theta - r \cos 2\theta \cos \theta,$$

$$Y = 2\beta - y = -2r \sin^3 \theta - r \cos 2\theta \sin \theta,$$

ou

$$(5) \quad X = r \cos \theta$$

et

$$(6) \quad Y = -r \sin \theta.$$

Ces dernières relations font voir que le point F est le symétrique de  $h$ , par rapport à OX <sup>(1)</sup>.

On aura l'équation de la parabole, en exprimant que les distances d'un point quelconque de cette courbe, au foyer F et à la directrice DOE, sont égales entre elles.

L'équation de la directrice DOE étant

$$y \cos \theta - x \sin \theta = 0,$$

l'équation de la parabole est

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2$$

ou

$$(x - r \cos \theta)^2 + (y + r \sin \theta)^2 = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2,$$

ou bien encore

$$(7) \quad (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 - 2r(x \cos \theta - y \sin \theta) + r^2 = 0,$$

équation dans laquelle

$$r = a \cos \theta + b \sin \theta.$$

3° Pour avoir l'équation du lieu des foyers, il faut

(1) C'est aussi ce que montre la Géométrie élémentaire, car de l'égalité supposée  $OH' = OH$  résulte évidemment

$$Oh' = Oh, \quad Ov = hu, \quad vv_1 = uu_1, \quad vu = v_1u_1 = Oh.$$

Les triangles rectangles  $u_1v_1S$ ,  $hOu$ , étant égaux,  $u_1S = hu$ , la droite  $uS$  est parallèle à  $hu_1$ , le point S est sur la droite  $uv$ .

En outre,  $SF = Si = vv_1$ . Donc  $vF$  est égale et parallèle à  $v_1S = Ou$ , par conséquent  $Fu$  est perpendiculaire à OX, et de plus égale à  $uh$ . C'est-à-dire que F est le symétrique de  $h$ , par rapport à OX.

(G.)

éliminer  $\theta$  entre les équations (5) et (6), qui donnent, en remplaçant  $r$  par sa valeur  $a \cos \theta + b \sin \theta$  :

$$X = (a \cos \theta + b \sin \theta) \cos \theta,$$

$$Y = -(a \cos \theta + b \sin \theta) \sin \theta,$$

$$X^2 + Y^2 = (a \cos \theta + b \sin \theta)^2,$$

et

$$\frac{\sin \theta}{-Y} = \frac{\cos \theta}{X} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{a \cos \theta + b \sin \theta}{aX - bY}.$$

D'où

$$X^2 + Y^2 = \frac{(aX - bY)^2}{X^2 + Y^2};$$

$$(X^2 + Y^2)^2 - (aX - bY)^2 = 0;$$

$$(X^2 + Y^2 - aX + bY)(X^2 + Y^2 + aX - bY) = 0.$$

Le lieu se compose du système des deux circonférences égales, représentées par les équations

$$X^2 + Y^2 - aX + bY = 0,$$

et

$$X^2 + Y^2 + aX - bY = 0.$$

4° En faisant  $y = 0$  dans l'équation (7), on obtient

$$(x \cos \theta - r)^2 = 0,$$

ce qui montre que la parabole est tangente à l'axe des  $x$ , au point

$$y = 0, \quad x = \frac{r}{\cos \theta}.$$

De même la parabole est tangente à l'axe des  $y$  au point

$$x = 0, \quad y = -\frac{r}{\sin \theta}.$$

5° L'équation de la corde des contacts de la parabole avec les axes est

$$\frac{x}{\frac{r}{\cos \theta}} - \frac{y}{\frac{r}{\sin \theta}} = 1,$$

ou

$$x \cos \theta - y \sin \theta = r = a \cos \theta + b \sin \theta,$$

qui peut s'écrire

$$(x - a) \cos \theta - (y + b) \sin \theta = 0.$$

Sous cette forme, on voit que la droite de contact passe par le point fixe  $x = a, y = -b$ , qui est le point symétrique de H par rapport à l'axe OX.

*Note.* — La question de Géométrie analytique du Concours d'admission à l'Ecole Centrale (première session 1882), a de même été résolue par M. Barisien; c'est par oubli que sa solution n'a pas été mentionnée dans le numéro de juillet dernier.