

E. FAUQUEMBERGUE

Question d'astronomie

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 413-415

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__413_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'ASTRONOMIE;

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Étant données les durées des quatre saisons de l'année astronomique ($92\frac{7}{8}$, $93\frac{7}{12}$, $89\frac{71}{96}$, $89\frac{1}{24}$ jours), trouver l'excentricité de l'orbite de la Terre.

(Nouvelle Correspondance mathématique, nov. 1878.)

Désignons par t_1 , t_2 , t_3 et t_4 les durées de l'hiver, du printemps, de l'été et de l'automne; par s_1 , s_2 , s_3 et s_4 les secteurs elliptiques correspondants; par T la durée d'une révolution complète et par S l'aire de l'orbite. D'après la loi des aires, nous pouvons écrire

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_3}{t_3} = \frac{s_4}{t_4} = \frac{S}{T}.$$

Nous sommes conduits à calculer les segments elliptiques $s_1 + s_2$ et $s_3 + s_4$.

Or, en prenant pour axe polaire la ligne des solstices, et en désignant par α l'angle que fait cette droite avec le grand axe, l'équation de la courbe est

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos(\omega-\alpha)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \frac{a^2}{2} (1-e^2)^2 \int_0^\pi \frac{d\omega}{[1-e\cos(\omega-\alpha)]^2} \\ &= a^2 \sqrt{1-e^2} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\omega-\alpha}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{e}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{\sin(\omega-\alpha)}{1-e\cos(\omega-\alpha)} \right]_0^\pi \\ &= a^2 \sqrt{1-e^2} \left(\arctan \frac{\sqrt{1-e^2}}{e \sin \alpha} - \frac{1}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{e \sin \alpha}{1-e^2 \cos^2 \alpha} \right). \end{aligned}$$

De même, en prenant l'intégrale entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on trouve

$$s_3 + s_1 = a^2 \sqrt{1-e^2} \left(\operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e \cos \alpha} - \sqrt{1-e^2} \frac{e \cos \alpha}{1-e^2 \sin^2 \alpha} \right).$$

D'ailleurs,

$$S = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}.$$

On a donc, pour déterminer e et α , les deux équations

$$(1) \quad \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e \sin \alpha} - \sqrt{1-e^2} \frac{e \sin \alpha}{1-e^2 \sin^2 \alpha} = \pi \frac{t_1 + t_2}{T},$$

$$(2) \quad \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e \cos \alpha} - \sqrt{1-e^2} \frac{e \cos \alpha}{1-e^2 \sin^2 \alpha} = \pi \frac{t_2 + t_1}{T}.$$

Pour les résoudre, nous poserons d'abord

$$(3) \quad \frac{\sqrt{1-e^2}}{e \sin \alpha} = \operatorname{tang} u;$$

d'où

$$\begin{aligned} e \sin \alpha &= \sqrt{1-e^2} \cot u, \\ 1-e^2 \cos^2 \alpha &= (1-e^2)(1-\cot^2 u). \end{aligned}$$

Par suite, l'équation (1) deviendra

$$u - \frac{\cot u}{1-\cot^2 u} = \pi \frac{t_1 + t_2}{T},$$

ou

$$2u - \sin 2u = 2\pi \frac{t_1 + t_2}{T},$$

ou encore, en faisant $2u = u_1$,

$$(4) \quad u_1 - \sin u_1 = 2\pi \frac{t_1 + t_2}{T}.$$

En posant de même

$$(5) \quad \frac{\sqrt{1-e^2}}{e \cos \alpha} = \operatorname{tang} v,$$

l'équation (2) deviendra

$$2v - \sin 2v = 2\pi \frac{t_4 - t_1}{T},$$

ou encore

$$(6) \quad v_1 - \sin v_1 = 2\pi \frac{t_4 - t_1}{T}.$$

Les angles u et v sont ainsi déterminés par les équations transcendantes (4) et (6). Ensuite, en divisant membre à membre l'équation (5) par l'équation (3), on aura

$$(7) \quad \tan z = \frac{\tan v}{\tan u},$$

d'où l'on déduira z . Il suffira alors de poser

$$(8) \quad e = \cos x,$$

pour que l'équation (3) donne

$$(9) \quad \tan x = \sin z \tan u.$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire l'application de ces formules aux données de l'énoncé.