

X. ANATOMARI

**Relations entre les distances du foyer
d'une conique à quatre points ou à
quatre tangentes [fin]**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 385-397

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__385_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**RELATIONS ENTRE LES DISTANCES DU FOYER D'UNE CONIQUE
A QUATRE POINTS OU A QUATRE TANGENTES**

[FIN (¹)] ;

PAR M. X. ANATOMARI,

Professeur au lycée de Carcassonne.

DEUXIÈME PARTIE.

**RELATION ENTRE LES DISTANCES D'UN FOYER
A QUATRE TANGENTES.**

1. L'équation tangentielle d'une courbe du second ordre rapportée à son foyer est

$$(1) \quad (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 - \frac{1}{p^2} = 0,$$

u_0 et v_0 désignant les coordonnées de la directrice.

Cette équation développée devient

$$u^2 + v^2 - 2uu_0 - 2vv_0 + u_0^2 + v_0^2 - \frac{1}{p^2} = 0.$$

Si donc (u, v) , (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , (u_3, v_3) désignent quatre tangentes, on aura les quatre équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^2 + v^2 - 2uu_0 - 2vv_0 + u_0^2 + v_0^2 - \frac{1}{p^2} = 0, \\ u_1^2 + v_1^2 - 2u_1u_0 - 2v_1v_0 + u_0^2 + v_0^2 - \frac{1}{p^2} = 0, \\ u_2^2 + v_2^2 - 2u_2u_0 - 2v_2v_0 + u_0^2 + v_0^2 - \frac{1}{p^2} = 0, \\ u_3^2 + v_3^2 - 2u_3u_0 - 2v_3v_0 + u_0^2 + v_0^2 - \frac{1}{p^2} = 0. \end{array} \right.$$

(¹) Voir même Tome, p. 337.

Soient d, d_1, d_2, d_3 les distances du foyer aux quatre tangentes. On aura

$$(3) \quad \begin{cases} d^2 = \frac{1}{u^2 + v^2}, & d_1^2 = \frac{1}{u_1^2 + v_1^2}, \\ d_2^2 = \frac{1}{u_2^2 + v_2^2}, & d_3^2 = \frac{1}{u_3^2 + v_3^2}. \end{cases}$$

Éliminons u_0, v_0 et $\frac{1}{\rho^2}$ entre les équations (2). Il viendra, en tenant compte des relations (3),

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{d^2} & u & v & 1 \\ \frac{1}{d_1^2} & u_1 & v_1 & 1 \\ \frac{1}{d_2^2} & u_2 & v_2 & 1 \\ \frac{1}{d_3^2} & u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation recherchée.

2. On voit sans plus de détails que, si trois tangentes restent fixes et que la quatrième varie de façon que la relation (4) soit satisfaite, la quatrième tangente enveloppe une conique ayant pour foyer l'origine; et, par suite, que réciproquement, si quatre droites sont assujetties à la relation (4), elles sont tangentes à une même conique ayant pour foyer l'origine ou un point donné.

3. Comme nous allons le voir, la relation (4) peut être mise sous une forme plus simple et plus facile à interpréter géométriquement. Mais nous pouvons dès à présent démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Dans les coniques à centre, le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles est constant.*

Supposons que les quatre tangentes forment un parallélogramme. On aura

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{u_2}{u} = \frac{v_2}{v} = K, \\ \frac{u_3}{u_1} = \frac{v_3}{v_1} = K'. \end{cases}$$

Par suite,

$$(6) \quad \begin{cases} d_2^2 = \frac{1}{u_2^2 + v_2^2} = \frac{1}{K^2} \times \frac{1}{u^2 + v^2} = \frac{d^2}{K^2}, \\ d_3^2 = \frac{1}{u_3^2 + v_3^2} = \frac{1}{K'^2} \times \frac{1}{u_1^2 + v_1^2} = \frac{d_1^2}{K'^2}. \end{cases}$$

Remplaçant dans (4), il vient

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{d^2} & u & v & 1 \\ \frac{1}{d_1^2} & u_1 & v_1 & 1 \\ \frac{K^2}{d^2} & Ku & Kv & 1 \\ \frac{K'^2}{d_1^2} & K'u_1 & K'v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Après avoir multiplié la première ligne par K et la deuxième par K' , retranchons la troisième de la première et la quatrième de la deuxième; puis supprimons les facteurs $(1 - K)$ et $(1 - K')$; nous aurons

$$\begin{vmatrix} \frac{K}{d^2} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{K'}{d_1^2} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{K^2}{d^2} & Ku & Kv & 1 \\ \frac{K'^2}{d_1^2} & K'u_1 & K'v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$\frac{KK'^2}{d_1^2} (uv_1 - v u_1) - \frac{K^2 K'}{d^2} (uv_1 - v u_1) = 0,$$

ou encore

$$(8) \quad \frac{d^2}{d_1^2} = \frac{K}{K'}.$$

Mais, en vertu des relations (6), on a

$$(9) \quad \frac{d_2^2}{d_3^2} = \frac{K'^2}{K^2} \frac{d^2}{d_1^2} = \frac{K'}{K},$$

et, en multipliant (8) et (9), membre à membre, on a

$$d^2 d_2^2 = d_1^2 d_3^2,$$

d'où

$$dd_2 = d_1 d_3. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. — *Le lieu des projections d'un foyer sur les tangentes est une circonférence.*

C'est à l'aide de cette propriété que nous déterminons les foyers dans l'ellipse et dans l'hyperbole; mais, avant d'aborder cette question, nous allons simplifier la relation (4).

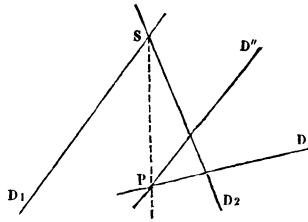
4. Commençons par rappeler une formule importante. Étant données deux droites $D_1(u_1, v_1)$ et $D_2(u_2, v_2)$ et un point P, intersection de deux droites $D'(u', v')$ et $D''(u'', v'')$ (fig. 15), on a

$$(10) \quad \frac{\sin D_1 SP}{\sin PSD_2} \times \frac{\sin OSD_2}{\sin OSD_1} = \pm \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix}},$$

O désignant l'origine des coordonnées.

Pour plus de détails à ce sujet, nous renvoyons à la *Géométrie analytique* de Painvin.

Fig. 15.



Posons maintenant

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

On voit sans peine que la relation (4) développée peut s'écrire

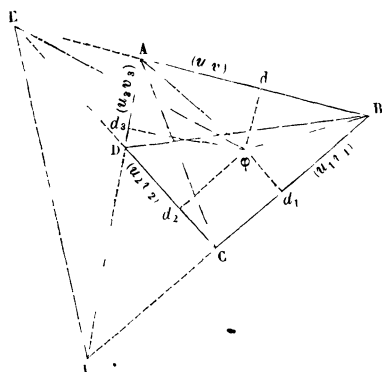
$$\frac{\Delta}{d^2} - \frac{\Delta_1}{d_1^2} + \frac{\Delta_2}{d_2^2} - \frac{\Delta_3}{d_3^2} = 0,$$

et, en divisant par Δ qui n'est pas nul, car les trois tangentes (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , (u_3, v_3) ne peuvent concourir au même point, il vient

$$(12) \quad \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d_1^2} \frac{\begin{vmatrix} v & u & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}} + \frac{1}{d_2^2} \frac{\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}} - \frac{1}{d_3^2} \frac{\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}} = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que le foyer soit à l'intérieur du quadrilatère formé par les quatre tangentes,

Fig. 16.



et soit φ ce foyer (fig. 16), qui est aussi l'origine.

On a, d'après ce qui précède,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta_1}{\Delta} &= \frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{DBC}} \times \frac{\sin \widehat{\varphi BC}}{\sin \widehat{\varphi BA}}, \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} &= \frac{\sin \widehat{BEF}}{\sin \widehat{CEF}} \times \frac{\sin \widehat{\varphi EC}}{\sin \widehat{\varphi EB}}, \\ \frac{\Delta_3}{\Delta} &= \frac{\sin \widehat{CAB}}{\sin \widehat{CAD}} \times \frac{\sin \widehat{\varphi AD}}{\sin \widehat{\varphi AB}}. \end{aligned} \right.$$

On a, d'autre part, en examinant la figure,

$$(14) \quad \frac{\sin \widehat{\varphi BC}}{\sin \widehat{\varphi BA}} = \frac{d_1}{d}, \quad \frac{\sin \widehat{\varphi EC}}{\sin \widehat{\varphi EB}} = \frac{d_2}{d}, \quad \frac{\sin \widehat{\varphi AD}}{\sin \widehat{\varphi AB}} = \frac{d_3}{d}.$$

En tenant compte des relations (13) et (14), l'équa-

tion (12) devient

$$(15) \quad \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \frac{\widehat{\sin ABD}}{\widehat{\sin DBC}} + \frac{1}{d_2} \frac{\widehat{\sin BEF}}{\widehat{\sin CEF}} - \frac{1}{d_3} \frac{\widehat{\sin CAB}}{\widehat{\sin CAD}} = 0.$$

Soient A, B, C, D les angles du quadrilatère. Les triangles ABD et DBC donnent

$$\frac{AD}{\widehat{\sin ABD}} = \frac{BD}{\sin A}, \quad \frac{DC}{\widehat{\sin DBC}} = \frac{DB}{\sin C};$$

d'où

$$\frac{\widehat{\sin ABD}}{\widehat{\sin DBC}} = \frac{AD}{DC} \times \frac{\sin A}{\sin C}.$$

On a de même, dans les triangles AEF et DEF,

$$\frac{\widehat{\sin AEF}}{AF} = \frac{\sin A}{EF}, \quad \frac{\widehat{\sin DEF}}{DF} = \frac{\sin D}{EF};$$

d'où

$$\frac{\widehat{\sin AEF}}{\widehat{\sin DEF}} = \frac{AF}{DF} \frac{\sin A}{\sin D}.$$

D'autre part, les deux triangles ABF et DCF donnent

$$\frac{AF}{\sin B} = \frac{AB}{\widehat{\sin AFB}}, \quad \frac{DF}{\sin C} = \frac{CD}{\widehat{\sin AFB}},$$

d'où

$$\frac{AF}{DF} = \frac{AB}{CD} \times \frac{\sin B}{\sin C},$$

et par suite

$$\frac{\widehat{\sin AEF}}{\widehat{\sin DEF}} = \frac{AB}{CD} \times \frac{\sin A \sin B}{\sin C \sin D}.$$

Enfin les deux triangles CAB et CAD donnent

$$\frac{\widehat{\sin CAB}}{\widehat{\sin CAD}} = \frac{CB}{CD} \frac{\sin B}{\sin D}.$$

Remplaçons dans (15), et nous aurons

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \times \frac{AD}{CD} \times \frac{\sin A}{\sin C} + \frac{1}{d_2} \times \frac{AB}{CD} \times \frac{\sin A \sin B}{\sin C \sin D} - \frac{1}{d_3} \times \frac{CB}{CD} \times \frac{\sin B}{\sin D} = 0,$$

ou encore, sous une forme tout à fait symétrique,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{CD \sin C \sin D}{d} - \frac{AD \sin A \sin D}{d_1} \\ + \frac{AB \sin A \sin B}{d_2} - \frac{BC \sin C \sin B}{d_3} = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi :

THÉOREME II. — *Si, dans une conique, les quatre côtés d'un quadrilatère sont tangents à une même branche de courbe, et si l'on multiplie chaque côté du quadrilatère par les sinus des angles adjacents, puis que l'on divise par la distance du foyer au côté opposé, la somme des résultats correspondant à deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.*

5. On démontrerait d'une manière analogue le théorème suivant :

THÉOREME III. — *Si un quadrilatère est circonscrit à une hyperbole de telle sorte qu'il y ait deux côtés tangents à chaque branche, en opérant comme dans le théorème II, la différence des résultats correspondant à deux côtés opposés est égale à la différence des deux autres.*

On aurait donc, dans ce cas,

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{AB \sin A \sin B}{d_2} - \frac{CD \sin C \sin D}{d} \\ = \frac{AD \sin A \sin D}{d_1} - \frac{CB \sin C \sin B}{d_3}. \end{array} \right.$$

Remarque. — Les théorèmes II et III pouvaient être déduits des théorèmes I et II de la première Partie. Nous avons préféré la démonstration précédente, qui nous semble plus élémentaire.

COROLLAIRE I. — *Dans tout quadrilatère inscriptible circonscrit à une ellipse, si l'on divise chaque côté par la distance du foyer au côté opposé, la somme des rapports correspondant à deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.*

Nous avons trouvé en effet

$$\begin{aligned} \frac{AB \sin A \sin B}{d_2} + \frac{CD \sin C \sin D}{d} \\ = \frac{AD \sin A \sin D}{d_1} + \frac{CB \sin C \sin B}{d_3}. \end{aligned}$$

Si le quadrilatère devient inscriptible, on a

$$\sin A \sin B = \sin C \sin D = \sin A \sin D = \sin C \sin B,$$

et, par suite, en supprimant le facteur commun $\sin A \sin B$,

$$(18) \quad \frac{AB}{d_2} + \frac{CD}{d} = \frac{AD}{d_1} + \frac{CB}{d_3}.$$

COROLLAIRE II. — *Dans tout quadrilatère inscriptible circonscrit à une hyperbole et tel qu'il y ait deux côtés tangents à chaque branche, en opérant comme précédemment, la différence des rapports relatifs à deux côtés opposés est égale à la différence des deux autres.*

Car si le quadrilatère devient inscriptible, la relation

$$\begin{aligned} \frac{AB \sin A \sin B}{d_2} - \frac{CD \sin C \sin D}{d} \\ = \frac{AD \sin A \sin D}{d_1} - \frac{CB \sin C \sin B}{d_3} \end{aligned}$$

devient

$$(19) \quad \frac{AB}{d_2} - \frac{CD}{d} = \frac{AD}{d_1} - \frac{CB}{d_3}.$$

6. Nous pouvons maintenant démontrer bien facilement le théorème I.

Considérons d'abord le cas de l'ellipse. Si le quadrilatère devient un parallélogramme, la relation (16) devient

$$AB \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_2} \right) = BC \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3} \right),$$

ou

$$AB \times d_1 d_3 (d - d_2) = BC \times d d_2 (d_1 - d_3)$$

Or

$$AB(d - d_2) = BC(d_1 - d_3) = S.$$

S désignant la surface du parallélogramme. Il en résulte

$$d_1 d_3 = d d_2.$$

Considérons maintenant le cas de l'hyperbole. Si le quadrilatère devient un parallélogramme, la relation (17) devient

$$AB \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_2} \right) = BC \left(\frac{1}{d_3} - \frac{1}{d_1} \right),$$

ou

$$AB \times d_1 d_3 (d_2 - d) = BC \times d d_2 (d_1 - d_3).$$

Or

$$AB(d_2 - d_1) = BC(d_1 - d_3) = S.$$

d'où

$$d_1 d_3 = d d_2$$

APPLICATION A LA DÉTERMINATION DES FOYERS.

7. Nous ne traiterons que le cas de l'ellipse, le cas de l'hyperbole s'en déduisant simplement.

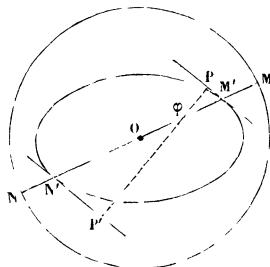
Nous avons vu que le lieu géométrique des projections d'un foyer sur les tangentes est une circonférence.

Par raison de symétrie, cette circonférence aura pour

centre le centre de la courbe; et, comme les tangentes sont extérieures à l'ellipse, elle sera tout entière extérieure à l'ellipse.

Supposons que le foyer soit un point quelconque φ intérieur à la courbe (fig. 17). Menons le diamètre φMN .

Fig. 17.



Il est visible sur la figure que l'on a

$$\varphi M > \varphi M', \quad \varphi N > \varphi N',$$

d'où

$$\varphi M \times \varphi N > \varphi M' \times \varphi N',$$

M et N étant les points de rencontre avec la circonférence, lieu des projections des tangentes.

D'autre part, si l'on mène les perpendiculaires φP et $\varphi P'$ sur les tangentes en M' et N' , on a

$$\varphi M' > \varphi P, \quad \varphi N' > \varphi P',$$

d'où

$$\varphi M' \times \varphi N' > \varphi P \times \varphi P',$$

et par suite

$$\varphi M \times \varphi N > \varphi P \times \varphi P'.$$

Mais les quatre points M, N, P et P' doivent appartenir à la même circonférence, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\varphi M \times \varphi N = \varphi P \times \varphi P'.$$

Cette égalité, comparée avec l'inégalité précédente, exige que M et P coïncident d'une part, N et P' de l'autre; par conséquent, que le diamètre MN soit normal à la courbe, car M et P ne peuvent coïncider qu'au point M'.

Ainsi les foyers sont sur l'un des axes. Ils ne peuvent évidemment pas être sur le petit axe, et ils seront par suite sur le grand axe. La circonférence lieu des projections des foyers devient alors la circonférence circonscrite et le produit constant devient égal à b^2 .

Si donc on désigne par c la distance d'un foyer au centre on devra avoir

$$(a + c)(a - c) = b^2,$$

ou

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{et} \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Remarque. — Dans le cas de la parabole, il faudrait commencer par exprimer que la courbe représentée par l'équation (4) représente une parabole, ce qui donnerait une relation entre les distances d'un foyer à trois tangentes. Cette relation servirait à déterminer le foyer.

RELATION ENTRE QUATRE CONIQUES INSCRITES DANS LE MÊME QUADRILATÈRE.

8. Reprenons la relation (16)

$$\frac{AB \sin A \sin B}{d_2} + \frac{CD \sin C \sin D}{d} - \frac{BC \sin B \sin C}{d_3} - \frac{AD \sin A \sin D}{d_1} = 0.$$

Soit C_i une conique inscrite dans le quadrilatère ABCD et soient x_i, y_i, z_i, u_i les distances de son foyer aux côtés du quadrilatère.

Faisant varier i de 0 à 3, on aura

$$\begin{aligned} \frac{CD \sin C \sin D}{x} - \frac{AD \sin A \sin D}{y} + \frac{AB \sin A \sin B}{z} - \frac{BC \sin B \sin C}{u} &= 0, \\ \frac{CD \sin C \sin D}{x_1} - \frac{AD \sin A \sin D}{y_1} + \frac{AB \sin A \sin B}{z_1} - \frac{BC \sin B \sin C}{u_1} &= 0, \\ \frac{CD \sin C \sin D}{x_2} - \frac{AD \sin A \sin D}{y_2} + \frac{AB \sin A \sin B}{z_2} - \frac{BC \sin B \sin C}{u_2} &= 0, \\ \frac{CD \sin C \sin D}{x_3} - \frac{AD \sin A \sin D}{y_3} + \frac{AB \sin A \sin B}{z_3} - \frac{BC \sin B \sin C}{u_3} &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant les quatre quantités qui entrent aux numérateurs, on aura

$$(20) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & \frac{1}{u} \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{u_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{u_2} \\ \frac{1}{x_3} & \frac{1}{y_3} & \frac{1}{z_3} & \frac{1}{u_3} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation cherchée. Elle donne le lieu géométrique des foyers des coniques inscrites dans un quadri-latère.

Si parmi ces quatre coniques il y a un cercle, la relation précédente devient

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & \frac{1}{u} \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{u_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{u_2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$