

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 372-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__372_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1281

(voir 2^e série, t. XVII, p. 381);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,

Professeur au lycée de Nice.

L'équation

$$(2 + \sqrt{3})^{2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{2x+1} = \frac{2}{\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^{2y+1} - (1 - \sqrt{2})^{2y+1}]$$

n'admet pas d'autre solution, en nombres entiers, que celle qui correspond aux valeurs $x = y = 0$.

(DE JONQUIERES.)

Si l'on pose

$$\begin{aligned} t &= \frac{(2 + \sqrt{3})^{2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{2x+1}}{2}, \\ u &= \frac{(2 + \sqrt{3})^{2x+1} - (2 - \sqrt{3})^{2x+1}}{2\sqrt{3}}, \\ v &= \frac{(1 - \sqrt{2})^{2y+1} - (1 + \sqrt{2})^{2y+1}}{2}, \\ w &= \frac{(1 + \sqrt{2})^{2y+1} - (1 - \sqrt{2})^{2y+1}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

on a identiquement

$$(1) \quad t^2 - 3w^2 = 1,$$

$$(2) \quad u^2 - 2v^2 = -1,$$

et l'équation proposée devient

$$(3) \quad t = 2v.$$

De ce système de trois équations on déduit facilement le suivant :

$$(4) \quad u^2 + 1 = 2v^2,$$

$$(5) \quad 2u^2 + 1 = 3w^2.$$

Or, M. Gerono a démontré (2^e série, t. XVII, p. 382) que ces deux dernières équations simultanées ne peuvent être vérifiées que par $u = v = w = 1$; d'où $t = 2$.

Donc il en résulte

$$(2 + \sqrt{3})^{2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{2x+1} = 4,$$

$$(2 + \sqrt{3})^{2x+1} - (2 - \sqrt{3})^{2x+1} = 2\sqrt{3},$$

d'où

$$(2 + \sqrt{3})^{2x+1} = 2 + \sqrt{3},$$

équation qui évidemment ne peut être satisfaite, en nombres entiers, que par $x = 0$.

De même

$$(1 + \sqrt{2})^{2y+1} + (1 - \sqrt{2})^{2y+1} = 2,$$

$$(1 + \sqrt{2})^{2y+1} - (1 - \sqrt{2})^{2y+1} = 2\sqrt{2},$$

d'où

$$(1 + \sqrt{2})^{2y+1} = 1 + \sqrt{2},$$

et enfin $y = 0$.

Question 1420(voir 3^e série, t. I, p. 132).

PAR M. REBUFFEL,

Professeur au lycée d'Angers.

Trouver la valeur des intégrales

$$\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{dx}{x[nx - (n+1)]\sqrt{R}},$$

dans lesquelles R désigne le polynôme

$$nx^{n+1} + (n-1)x^{n-2} - (n-2)x^{n-3} + \dots - 2x + 1.$$

(S. RÉALIS.)

I. On sait que

$$R = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$

par conséquent

$$\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{x^{n-1}(x-1) dx}{\sqrt{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}}.$$

Posons

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = y.$$

d'où

$$n(n-1)(x^n - x^{n-1}) dx = dy,$$

l'intégrale devient

$$\frac{1}{n(n-1)} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{n(n-1)} = \frac{2(x-1)}{n(n-1)} \sqrt{R}.$$

II. On peut écrire la deuxième intégrale

$$\int \frac{x^{n-1} dx}{x^n[nx - (n+1)]\sqrt{R}} \\ = \int \frac{(x-1)x^{n-1} dx}{x^n[nx - (n+1)]\sqrt{x^n[nx - (n+1)] - 1}},$$

et, en posant

$$x^n [nx - (n+1)] = y,$$

d'où

$$n(n+1)[x^n - x^{n-1}] dx = dy,$$

elle devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y}} &= \frac{2}{n(n-1)} L \frac{\sqrt{1+y} - 1}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} L \frac{(x-1)\sqrt{R-1}}{\sqrt{(x-1)^2 R-1}}. \end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Piuma (Charles-Marie), à Gênes; Chabanel (Charles) et H.-B.-D., professeur de Mathématiques à Rome.

Question 1423

(voir 3^e série, t. I, p. 479);

PAR M. N. GOFFART.

On donne une conique fixe et deux points A et A' situés sur une même tangente à cette courbe.

Par le point A' on mène une seconde tangente qui touche la conique en d. On mène la droite Ad qui rencontre de nouveau la conique au point e, la droite A'e qui coupe la conique au point f et enfin la droite Af rencontrant de nouveau la conique au point g.

Démontrer que la tangente à la conique au point g et la droite A'ef se coupent en un point de la seconde tangente menée du point A à la courbe. (GENTY.)

Soient h ⁽¹⁾ le point de contact de AA' et i le point d'intersection de A'e et gd : la droite hi est la polaire de A ⁽²⁾; elle rencontre la conique en m et la tangente A'd

⁽¹⁾ Le lecteur est prié de faire la figure.

⁽²⁾ Parce que la polaire de A passe par le point d'intersection, *i*, des diagonales *cf*, *dg* du quadrilatère inscrit *dfge* dont les côtés op-

en B. Or, d étant le pôle de $A'dB$, il en résulte que Ad est la polaire de B, et que par suite Be est tangente en e à la conique.

Appliquons le théorème de Pascal au triangle den .

Les tangentes Be , AA' , $A'B$ rencontrent respectivement les côtés hd , de , eh aux points P, A, C qui sont en ligne droite.

Or e est le pôle de BeP , A' celui de hd : donc $A'fe$ est la polaire du point P. Cette polaire rencontre gd en i ainsi que hm : donc gm passe au point P.

Donc les trois pôles P, g , m étant en ligne droite, leurs polaires $A'ef$, gR tangente en g , et Am tangente en m se coupent au même point. C. Q. F. D.

Note. — Autres solutions analytiques de MM. Moret-Blanc, Ch. Robinet et U. Génin, élèves au Lycée de Bar-le-Duc; Romant, élève au Lycée de Lyon; Berthelet, élève au Lycée de Moulins.

Question 1424

(voir 3^e série, t. I. p. 180).

PAR M. MORET-BLANC.

On donne un ellipsoïde et un point A, on mène par ce point une sécante variable D; soit D_1 la droite conjuguée de D par rapport à l'ellipsoïde. Trouver le lieu de la projection M du point A sur la droite D_1 .

(BARBARIN.)

posés de , fg se coupent en A. La droite Hi prolongée rencontre la conique au point m de contact de la seconde tangente mA menée de A.

De même, la polaire du point P de rencontre des droites mg , dh passe par le point i intersection des diagonales gd , hm du quadrilatère inscrit $mghd$; donc $A'ef$ est la polaire du point P; et par conséquent les tangentes à la courbe aux points m , g se coupent en un point de $A'ef$. C'est ce qu'il fallait démontrer. (G.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

équation de l'ellipsoïde.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A; x_1, y_1, z_1 celles d'un autre point B de la droite D.

La droite D_1 sera l'intersection des plans polaires des points A et B; elle aura pour équations

$$(1) \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$$

$$(2) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0.$$

Les cosinus directeurs de cette droite sont proportionnels à

$$\frac{y_0 z_1 - z_0 y_1}{b^2 c^2}, \quad \frac{z_0 x_1 - x_0 z_1}{c^2 a^2}, \quad \frac{x_0 y_1 - y_0 x_1}{a^2 b^2};$$

l'équation du plan mené par le point A perpendiculairement à D_1 est donc

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{y_0 z_1 - z_0 y_1}{b^2 c^2} (x - x_0) \\ + \frac{z_0 x_1 - x_0 z_1}{c^2 a^2} (y - y_0) + \frac{x_0 y_1 - y_0 x_1}{a^2 b^2} (z - z_0) = 0. \end{cases}$$

On obtiendrait l'équation du lieu du point M en éliminant x_1, y_1, z_1 entre ces trois équations; mais l'équation (1), ne renfermant pas ces variables, est celle du lieu demandé qui est le plan polaire du point A.

Ce résultat pouvait être prévu, car la droite D tournant autour du point A, sa conjuguée D_1 se meut dans le plan polaire de ce point et peut y prendre toutes les positions; un point quelconque M du plan est donc la projection du point A sur une des droites D_1 .

Note. — La même question a été résolue par M. Goffart.

Question 1427

(voir 3^e série, t. I, p. 527)

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{(x-1)^m x^n dx}{\sqrt{P_n x^n - P_{n-1} x^{n-1} - \dots - P_2 x^2 - P_1 x - 1}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$P_k = \frac{(k-1)(k-2)(k-3)\dots(k-2m-1)}{1.2.3\dots(2m-1)}.$$

(S. RÉALIS.)

Désignons par R le polynôme compris sous le signe du radical. Le produit de R par $1.2.3\dots(2m+1)$ est identique à la dérivée de l'ordre $2m+1$ de

$$x^{n+2m+1} + x^{n+2m} - x^{n+2m-1} - \dots + x + 1 = \frac{x^{n+2m+2} - 1}{x - 1};$$

en posant

$$\varphi = \frac{x^{n+2m+2} - 1}{x - 1},$$

l'intégrale proposée devient donc

$$S = \sqrt{1.2.3\dots(2m-1)} \int \frac{(x-1)^m x^n dx}{\sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}}.$$

Soit

$$y^2 = (x-1)^{2m+2} \frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}},$$

nous aurons, en différentiant cette équation,

$$2y \, dy = (x-1)^{2m+1} \left[(x-1) \frac{d^{2m+2}\varphi}{dx^{2m+2}} - (2m-2) \frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}} \right] dx,$$

puis, en divisant le premier membre par y et le second

$$\text{par } (x-1)^{m+1} \sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}},$$

$$2 \, dy = \frac{(x-1)^m}{\sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}} \left[(x-1) \frac{d^{2m+2}\varphi}{dx^{2m+2}} + (2m+2) \frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}} \right] dx.$$

De

$$(x-1)\varphi = x^{n+2m+2} - 1$$

on déduit successivement

$$(x-1) \frac{d\varphi}{dx} + \varphi = (n+2m+2)x^{n+2m+1},$$

$$(x-1) \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2 \frac{d\varphi}{dx} = (n+2m+1)(n+2m+2)x^{n+2m},$$

$$(x-1) \frac{d^3\varphi}{dx^3} + 3 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = (n+2m)(n+2m+1)(n+2m+2)x^{n+2m-1},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$(x-1) \frac{d^{2m+2}\varphi}{dx^{2m+2}} + (2m+2) \frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}} = (n+1)(n+2)\dots(n+2m+2)x^n.$$

Donc

$$2 \, dy = (n+1)(n+2)\dots(n+2m+2) \frac{(x-1)^m x^n dx}{\sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}}$$

et

$$S = \frac{2y \sqrt{1.2.3\dots(2m+1)}}{(n+1)(n+2)\dots(n+2m+2)}.$$

Remplaçant y par sa valeur

$$(x-1)^{m+1} \sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}} = (x-1)^{m+1} \sqrt{1.2.3\dots(2m+1)R},$$

on a

$$S = 2 < \frac{1.2.3\dots(2m+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+2m+2)} (x-1)^{m+1} \sqrt{R}.$$

Remarque. — Si l'on fait $m = 0$ et si l'on remplace n par $n - 1$, on a

$$R = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1$$

et

$$S = \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{R}} = \frac{2(x-1)\sqrt{R}}{n(n+1)}.$$

Note. — Solution analogue de M. Charles-Marie Piuma, à Gènes.

Question 1428

(voir 3^e série, t. I, p. 528);

PAR M. ERNEST CÉSARO.

Si l'on considère les solutions entières (non négatives) de chacune des équations

$$x + 2y = n - 1, \quad 2x + 3y = n - 3, \quad 3x + 4y = n - 5, \quad \dots,$$

le nombre total de ces solutions égale l'excès de $n + 2$ sur le nombre des diviseurs de $(n + 2)$.

(CATALAN.)

La $p^{\text{ième}}$ des équations proposées est

$$px + (p+1)y = n - (2p-1).$$

Il est visible qu'on y satisfait en prenant $x = -(n+3)$, $y = n+1$. En conséquence, les solutions *entières* de cette équation sont données par les formules

$$\begin{aligned} x &= -(n+3) + (p+1)t, \\ y &= n+1 - pt, \end{aligned}$$

où t est un entier quelconque.

Pour que x et y ne soient pas négatifs, il faut attribuer

à t des valeurs telles qu'on ait

$$\frac{n+3}{p+1} \leq t \leq \frac{n+1}{p}$$

ou bien

$$\left[\frac{n+2}{p+1} \right] < t \leq \left[\frac{n+1}{p} \right],$$

$[Z]$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans Z .

Le nombre des solutions *entières, non négatives*, de l'équation considérée, est donc

$$N_p = \left[\frac{n+1}{p} \right] - \left[\frac{n+2}{p+1} \right].$$

Cela posé, il est clair que $\left[\frac{n+2}{p+1} \right] - \left[\frac{n+1}{p+1} \right]$ égale 1, ou 0, suivant que $p+1$ divise ou ne divise pas $n+2$.

Conséquemment on a

$$N_p = \left[\frac{n+1}{p} \right] - \left[\frac{n+1}{p-1} \right] - 1$$

si $p+1$ divise $n+2$, et

$$N_p = \left[\frac{n+1}{p} \right] - \left[\frac{n+1}{p-1} \right]$$

lorsque $p+1$ ne divise pas $n+2$.

Si $\theta(Z)$ désigne le nombre des diviseurs de Z , on obtient par addition

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 + \dots \\ = \left[\frac{n+1}{1} \right] - [\theta(n+2) - 1] = n+2 - \theta(n+2)^{(1)}. \end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Chabanel et Goffart.

⁽¹⁾ Si $px + (p+1)y = n - (2p-1)$ représente la dernière des équations

$x+2y = n-1, \quad 2x+3y = n-3, \quad 3x+4y = n-5, \quad \dots,$