

LAQUIÈRE

**Détermination et construction nouvelle
du cercle qui coupe trois cercles sous trois
angles donnés et de la sphère qui coupe
quatre sphères sous des angles donnés**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 348-352

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__348_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DÉTERMINATION ET CONSTRUCTION NOUVELLE DU CERCLE
QUI COUPE TROIS CERCLES SOUS TROIS ANGLES DONNÉS
ET DE LA SPHÈRE QUI COUPE QUATRE SPHÈRES SOUS DES
ANGLES DONNÉS ;**

PAR M. LAQUIÈRE.

Dans un récent article, nous avons donné deux démonstrations d'un théorème permettant de construire le cercle qui en coupe trois autres sous trois angles respectivement égaux à trois angles différents donnés, aussi simplement que le cercle isogonal, ou que le cercle tangent aux trois.

La démonstration qui suit, beaucoup plus simple, met en évidence une construction nouvelle beaucoup plus simple encore. Elle nous a fait découvrir un beau théorème de Géométrie à trois dimensions qui n'a peut-être pas encore été remarqué, bien qu'il soit d'une extrême simplicité.

Nous donnons, *in extenso*, la démonstration en question, vu son peu de longueur.

Soit R le rayon d'un cercle variable Γ coupant sous deux angles respectifs constants α_1 et α_2 deux cercles fixes c_1 , c_2 de rayons r_1 , r_2 .

Soient de plus

$$\lambda_1 = -2r_1 \cos \alpha_1, \quad \lambda_2 = -2r_2 \cos \alpha_2$$

les cordes interceptées par les cercles c_1 et c_2 sur les rayons du cercle Γ aboutissant aux points d'intersection ;
les distances tangentielles γ_1 et γ_2 du centre du cercle Γ aux cercles c_1 et c_2 donneront les relations simultanées

$$\gamma_1^2 = R^2 + R\lambda_1,$$

$$\gamma_2^2 = R^2 + R\lambda_2 ;$$

d'où

$$(1) \quad R^2(\lambda_1 - \lambda_2) = \lambda_1 \gamma_2^2 - \lambda_2 \gamma_1^2,$$

et de même

$$R(\lambda_1 - \lambda_2) = \gamma_1^2 - \gamma_2^2.$$

Éliminant R ,

$$(2) \quad (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 \gamma_2^2 - \lambda_2 \gamma_1^2) = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^2.$$

L'équation (2) exprime que le lieu du centre du cercle variable Γ est une conique V ayant un double contact avec le cercle Ω

$$(3) \quad \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

aux points d'intersection des deux cercles c_1, c_2 avec lesquels il a même axe radical.

L'équation (1) exprime de son côté que la puissance du centre du cercle variable Γ par rapport au cercle Ω est égale à R^2 , et par suite qu'il lui est orthogonal (¹).

Le cercle Ω est facile à construire, puisqu'il passe par les points d'intersection des deux cercles c_1, c_2 et par les points des tangentes communes dont les distances aux points de contact sont dans le rapport $\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$.

L'équation (3) exprime que le cercle Ω partage l'angle des deux cercles c_1 et c_2 , de manière à faire avec eux deux angles respectifs ω_1 et ω_2 définis par la relation

$$(4) \quad \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2},$$

comme on le voit immédiatement en prenant par rap-

(¹) Le cercle variable Γ a donc pour enveloppe les deux cercles passant aux points d'intersection de c_1 et c_2 , anallagmatique du quatrième ordre à deux points doubles.

port aux deux cercles c_1 et c_2 la puissance du point du cercle Ω infiniment voisin du point où les trois cercles se rencontrent.

La relation indiquée pour les cercles subsiste pour les sphères représentées par leurs cercles équateurs du plan des trois centres. La série des sphères Σ coupant s_1 et s_2 sous les angles constants α_1 et α_2 est donc orthogonale à la sphère fixe (3) qui passe par leur cercle d'intersection et les coupe sous les angles définis par la relation (4). Leur centre est sur une surface du second ordre de révolution autour de la ligne des centres des sphères s_1 et s_2 et circonscrite suivant leur ligne d'intersection à la sphère (3) que toutes les sphères Σ coupent orthogonalement.

Soit à trouver le cercle coupant trois cercles donnés sous trois angles donnés. Les remarques ci-dessus permettront de le déterminer des deux manières suivantes :

1° En le considérant comme le cercle orthogonal aux trois cercles Ω'' , Ω' , Ω'' obtenus, ainsi qu'il vient d'être dit, avec chaque groupe de deux cercles c_1 , c_2 , c_3 accouplés ;

2° En déterminant son centre comme intersection des deux coniques V obtenues dans deux de ces combinaisons.

De même, la sphère coupant quatre sphères sous quatre angles donnés se déterminera :

1° Comme orthogonale à quatre sphères Ω ;

2° Comme ayant son centre à l'intersection de trois surfaces du second ordre de révolution dont les axes se rencontrent deux à deux, et qui se coupent par suite suivant des courbes planes dans des plans perpendiculaires à celui qui contient les deux axes de révolution.

Enveloppe des sphères coupant trois sphères fixes sous trois angles donnés respectivement constants. —

D'après ce qui précède, cette enveloppe est la cyclide ayant pour section principale les deux cercles coupant les trois équateurs du plan des trois centres sous les angles donnés.

Elles sont, en effet, orthogonales au cercle d'intersection des trois sphères Ω''' , Ω' , Ω'' déterminées comme il a été dit plus haut, et leur centre décrit la conique d'intersection de ce plan (perpendiculaire au plan des trois centres) avec les surfaces du second ordre également déterminées, toutes courbes planes qui se croisent aux deux mêmes points, réels ou imaginaires, points coniques de la nappe considérée.

Les angles α_1 , α_2 , α_3 et leurs trois supplémentaires déterminent les deux cercles sections principales d'une même nappe qui se coupent en deux points sur le cercle orthogonal aux trois équateurs, second couple de points coniques de la cyclide (un couple au moins est imaginaire). Leur corde détache sur les lignes des centres et à partir de ceux-ci des segments directement proportionnels aux couples de longueurs λ_1 , λ_2 , λ_3 se rapportant aux cercles de mêmes indices, ainsi que nous l'avons démontré dans une Note antérieure.

Si l'on remplace successivement un seul des angles α par son supplémentaire, on obtient les trois autres couples de cercles sections principales des trois autres nappes de la cyclide.

Scolie. — L'enveloppe du cercle coupant deux cercles fixes sous deux inclinaisons constantes se compose de deux cercles passant par les points d'intersection des deux cercles donnés (section principale d'une cyclide dont l'une des directrices réduite à un plan est orthogonale à la sphère enveloppée).

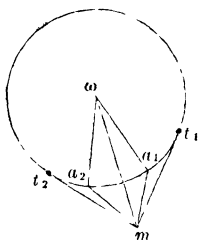
Observation. — Le théorème est évident par la trans-

formation par rayons vecteurs réciproques du lieu par l'un des points d'intersection des trois sphères fixes. La transformée de la sphère variable ayant évidemment pour centre de similitude commun de toutes ses positions le sommet du trièdre dont les faces sont les réciproques des trois sphères fixes, l'enveloppe de la sphère variable est la cyclide réciproque du cône de révolution enveloppe de ses transformées.

Même observation pour le scolie.

Remarque. — Le scolie donne une autre manière de construire le cercle Γ par la construction immédiate de six cercles auxquels il doit être tangent.

Par un point quelconque ω tracer un cercle et ses rayons $\omega a_1, \omega a_2$ respectivement inclinés de α_1 et α_2 sur



les tangentes aux cercles c_1 et c_2 en leur point M d'intersection. Par le point de concours m des parallèles respectives $a_1 m, a_2 m$ à ces tangentes, mener les tangentes mt_1, mt_2 au cercle ω . Leurs directions seront celles des tangentes en M aux deux cercles tangents à la série des cercles Γ , tandis que $m\omega$ sera celle de leur cercle orthogonal Ω et de la conique lieu de leurs centres. La même construction pour chaque couple de cercles c_1, c_2, c_3 détermine trois cercles orthogonaux et six cercles tangents au cercle cherché Γ .

Construction analogue pour les sphères.