

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 333-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_333_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS.

1451. Démontrer que, si les deux racines de l'équation

$$z^2 - 3xz - (x^3 - \beta^2) = 0$$

sont entières, l'équation indéterminée

$$(A) \quad x^3 + k = y^2,$$

dans laquelle on a pris

$$k = [(x + 1)^3 - (\beta + 1)^2]z,$$

admet toujours une solution entière.

Exemples.

1^o Pour $x = a^2$,

$$\beta = \pm a^3,$$

d'où

$$z = 3a^2, \quad k = 3a^4(3a^2 \mp 2a + 3),$$

l'équation (A) est vérifiée par

$$x = -2a^2, \quad y = a^2(a \mp 3).$$

2° Pour $\alpha = 2$,

$$\beta = \pm 1,$$

d'où

$$z' = 7, \quad z'' = -1.$$

Les équations

$$x^3 + 161 = y^2, \quad x^3 - 23 = y^2;$$

$$x^3 + 189 = y^2, \quad x^3 - 27 = y^2$$

admettent respectivement les solutions

$$-5^3 + 161 = 6^2, \quad 3^3 - 23 = 2^2;$$

$$-5^3 + 189 = 8^2, \quad 3^3 - 27 = 0.$$

3° Pour $\alpha = 32$,

$$\beta = \pm 64,$$

d'où

$$z' = 224, \quad z'' = -128;$$

on a les résultats

$$-192^3 + 7103488 = 160^2, \quad 160^3 - 4059136 = 192^2;$$

$$-192^3 + 7160832 = 288^2, \quad 160^3 - 4091904 = 64^2,$$

équivalant, respectivement, à

$$-48^3 + 110992 = 20^2, \quad 10^3 - 991 = 3^2;$$

$$-48^3 + 111888 = 36^2, \quad 10^3 - 999 = 1^2.$$

Nota. — L'équation en z , mise sous la forme

$$z^3 + (3\alpha - z)z = \beta^2$$

et supposée vérifiée par des valeurs entières de α , β , z , constitue par elle-même une solution entière de (A), pour une infinité de valeurs de k , comprises dans l'expression $(3\alpha - z)z$.

Le résultat le plus simple à obtenir par cette voie consiste dans l'égalité évidente

$$2^3 - 7 = 1^2.$$

(S. REALIS.)

1452. L'expression

$$8\beta - 3(\alpha^2 + 2\alpha) + 1$$

se réduisant à un carré pour des valeurs entières de α et β , l'équation indéterminée

$$x^3 - (\alpha^3 - \beta^2) = y^2$$

est résoluble en nombres entiers x, y , indépendamment de la solution immédiate

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

Exemples.

Pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$, valeurs satisfaisant à la condition indiquée, l'équation devient

$$x^3 + 1 = y^2,$$

et admet les solutions

$$x = -1, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = 2, \quad y = 3,$$

en outre de la solution immédiate

$$x = 0, \quad y = 1.$$

Pour $\alpha = -2$, $\beta = \frac{a^2 + a}{2}$, l'équation

$$x^3 + \left(\frac{a^2 + a}{2} \right)^2 + 8 = y^2$$

admet les solutions

$$\begin{aligned} x &= -a + 1, & x &= a + 2, \\ y &= \frac{a^2 - a}{2} + 3, & y &= \frac{a^2 + 3a}{2} + 4, \end{aligned}$$

en outre de la solution immédiate

$$x = -2, \quad y = \frac{a^2 + a}{2}.$$

(S. RÉALIS.)

1453. Le nombre $\frac{(\sqrt{2} + 1)^{2n-1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$ est la somme des carrés de deux nombres entiers.

(CATALAN.)

1454. On donne une sphère et un point dans son intérieur; de ce point on mène trois cordes telles que le pôle du plan de deux quelconques d'entre elles soit sur la troisième : la somme des inverses des carrés de ces cordes est constante.

(MANNHEIM.)

1455. On considère deux droites rectangulaires et un cercle tangent à ces deux droites; le lieu des foyers des paraboles tangentes à la fois aux deux droites et à la circonférence est une circonférence tangente aux deux droites.

(WEIL.)

1456. Soient $a, a'; b, b'; c, c'$ les points d'intersection d'une conique et des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC : démontrer que les six droites Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' enveloppent une autre conique.

(H. SCHROETER.)

1457. Une hyperbole est tangente aux axes d'une ellipse, et les asymptotes de l'hyperbole sont tangentes à l'ellipse; prouver que le centre de l'hyperbole est sur l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

(WOLSTENHOLME.)

1458. Construire une parabole tangente à une circonférence donnée, connaissant l'axe et le paramètre de la parabole.

(A.)

1459. Le cube d'un nombre entier autre que l'unité ne peut être la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs.
