

G. KÆNIGS

Sur les cubiques gauches passant par cinq points donnés

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 301-306

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_301_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_301_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES CUBIQUES GAUCHES PASSANT PAR CINQ POINTS
DONNÉS;**

PAR M. G. KOENIGS.

En cherchant la solution de la question 1285 proposée par M. Genty dans les *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XVII, p. 487, j'ai été conduit à quelques propriétés des cubiques gauches passant par cinq points donnés : j'énoncerai simplement les résultats en me contentant d'indiquer la méthode qui m'y conduit.

I. Les triangles que les diverses cubiques passant par cinq points tracent sur un plan fixe α sont, on le sait, conjugués par rapport à une conique H_α de ce plan : la trace sur le plan α de la droite joignant deux des cinq points est le pôle de la trace du plan des trois autres. Appelons, pour abréger, points correspondants les sommets du triangle qu'une quelconque des cubiques du système détermine sur le plan α . On voit tout de suite que :

La conique H_α étant le lieu des points du plan α qui coïncident avec un de leurs correspondants, H_α se trouve être le lieu des points de contact du même plan avec les cubiques du système qui le touchent.

Désignons par C_x la cubique du système qui passe par le point x de l'espace. La cubique C_v , qui passe par le point v pris sur la conique H_α , a sa tangente vt dans le plan α , elle perce ce plan au point w pôle de vt par rapport à H_α . Lorsque le point v décrit la conique, w décrit

une courbe A_α dans le plan α , et *enveloppe* une courbe B_α .

La courbe A_α est le lieu des points du plan α dont les points correspondants coïncident.

La courbe B_α est l'enveloppe dans le plan α des droites du complexe formé par les tangentes aux cubiques du système.

On peut remarquer que le cône du second ordre ayant ω pour sommet et contenant la cubique $C_v = C_w$ est tangent au plan α tout du long de $v\omega$; d'ailleurs, cette droite $v\omega$ touche au point v la conique H_α . Donc :

La courbe A_α est le lieu des sommets des cônes du second ordre contenant les cinq points donnés et tangents au plan donné.

La conique H_α est l'enveloppe des génératrices de contact.

L'étude de la courbe A_α complétera donc la solution de la question 1285.

II. Pour faciliter l'étude des courbes A_α et B_α , nous introduirons un système de quartiques planes que nous allons définir.

Soient Δ une droite du plan α , d son pôle par rapport à H_α ; d' et d'' les points correspondants de d , situés sur Δ . Les cubiques du système qui rencontrent une fois Δ tracent sur le plan α , outre la droite Δ , une courbe $U_\alpha(\Delta)$.

La courbe $U_\alpha(\Delta)$ est du quatrième ordre; elle a un point double en d , et dd' , dd'' sont les tangentes en ce point double.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de remarquer qu'un point x décrivant la droite Δ , ses correspon-

dants y et z sont alignés avec le point d : sur toute droite λ issue de d , il n'y a que deux points du lieu, et l'un d'eux vient coïncider avec d chaque fois que la droite λ vient coïncider avec dd' ou dd'' .

La courbe $U_\alpha(\Delta)$ coupe la droite Δ aux deux points d' et d'' d'abord, et puis aux points où Δ coupe la conique H_α . Cette conique est donc rencontrée en six autres points u par la courbe $u_\alpha(\Delta)$. Au sujet des six droites joignant le point d à ces points, on observe que :

1° Elles sont tangentes aux points u à la courbe $U_\alpha(\Delta)$;

2° Elles sont tangentes aux points u aux cubiques C_u et, par suite, sont des droites du complexe des tangentes aux cubiques du système;

3° En dehors de ces six droites, on ne peut mener du point d d'autres tangentes à la courbe B_α ; et en dehors de ces mêmes droites et des tangentes dd' et dd'' en son point double d , la courbe $U_\alpha(\Delta)$ n'admet pas d'autre tangente issue du point d .

On voit donc que la courbe $U_\alpha(\Delta)$ est de la dixième classe, et, par suite, qu'elle n'admet pas d'autre point double que le point d ; on peut voir aussi que la courbe $U_\alpha(\Delta)$ passe par les dix traces sur le plan α des droites joignant les cinq points deux à deux, etc.

En faisant tourner le plan α autour de la droite Δ , on arrive à ce résultat :

La surface décrite par les cubiques du système qui rencontrent une droite fixe est du cinquième ordre. Elle admet une cubique double, à savoir : la cubique du système qui s'appuie deux fois sur la droite fixe.

En dehors de la droite fixe, cette surface contient les dix droites joignant les cinq points donnés pris deux à deux.

III. Revenons à la courbe B_α ; nous venons de con-

struire les tangentes qu'on peut lui mener d'un point quelconque du plan : elle est de la sixième classe. Il est aisé de voir qu'elle est unicursale. En effet, appelons 1, 2, 3, 4, 5 les cinq points donnés, la droite (1, 2) peut être adjointe à deux coniques circonscrites au triangle (3, 4, 5) et tangentes au plan α , chacune en l'un des deux points où H_α perce le plan (3, 4, 5); on obtient ainsi deux cubiques singulières du système, tangentes au plan α : la trace du plan (3, 4, 5) s'offre donc deux fois comme tangente à la courbe B_α : c'est donc une tangente double de cette courbe. Ainsi :

La courbe B_α est de la sixième classe et unicursale : ses dix tangentes doubles sont les traces sur le plan α des plans menés par les cinq points pris trois à trois.

On en déduit pour la courbe A_α , qui est la réciproque de B_α par rapport à H_α , la proposition suivante :

La courbe A_α est du sixième ordre et unicursale : ses dix points doubles sont les traces sur le plan α des droites joignant les cinq points pris deux à deux.

Et pour le complexe des tangentes aux cubiques du système :

Le complexe formé par les tangentes aux cubiques gauches passant par cinq points est du sixième ordre.

Le cône du complexe est donc du sixième ordre.

Son sommet p étant pris arbitraire dans l'espace, on en connaît trente génératrices, savoir :

- 1° Les droites joignant p aux cinq points donnés;
- 2° Les droites joignant p aux dix points que l'on obtient en prenant les traces des droites joignant les cinq points deux à deux, sur le plan des trois autres;
- 3° Les quinze droites qui, issues de p , rencontrent cha-

cune un couple d'arêtes opposées des cinq tétraèdres que l'on peut former avec les cinq points donnés.

IV. Le complexe qui nous occupe offre un mode de génération intéressant, qui rentre dans un ordre de considérations développées par Transon dans un Mémoire qui a été l'objet d'un Rapport de Chasles (*Comptes rendus*, t. XLII). Si, à tout point p de l'espace, il correspond une direction de droite, la droite issue de p , parallèle à cette direction, fait partie d'un complexe, et le point p s'appelle le *point de départ* de cette droite du complexe. Dans un complexe défini par les points de départ de ses rayons, il existe un système de cônes du second ordre, découverts par Malus, et auquel Transon rattache, dans son Mémoire, d'importantes propriétés infinitésimales des complexes. Imaginons que le point p_0 de l'espace soit le point de départ d'une droite Δ_0 du complexe; si le point p est infiniment voisin de p_0 , le rayon Δ , dont p est le point de départ, sera infiniment voisin de Δ_0 ; si l'on demande que Δ forme avec Δ_0 un élément de surface développable, on trouve que le point p doit définir une droite $p_0 p$ située sur un cône du second ordre ayant p_0 pour sommet : c'est le cône de Malus. Ce cône varie d'un point à l'autre de l'espace et engendre le système de cônes que nous voulions définir.

Dans le cas actuel, tout point p de l'espace définit une cubique C_p , et s'offre comme le point de départ de la tangente à cette courbe en ce point. Le complexe qui nous occupe peut donc être facilement défini par le point de départ de ses rayons.

Relativement au cône de Malus, il nous suffira d'énoncer ce résultat fort simple :

Le cône de Malus relatif à un point p_0 de l'espace est le cône projectif à la cubique C_{p_0} .

Le complexe que nous étudions offre donc une solution du problème suivant, qui dépend d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre :

Trouver un complexe défini par les points de départ de ses rayons, et tel que le cône de Malus relatif à tout point de l'espace contienne cinq points fixes.

V. Nous terminerons en énonçant une proposition concernant les points d'intersection des courbes A_α , B et H_α . Elle consiste en ce que :

Les courbes A_α , B_α et H_α sont tangentes aux six mêmes points.

Appelons u' un de ces six points; comme appartenant à H_α , u' coïncide avec un de ses correspondants; comme appartenant à A_α , ses deux correspondants coïncident. En u' se réalise donc la coïncidence de trois points correspondants; la cubique $C_{u'}$ est, par suite, osculatrice au plan α . Ainsi :

Il y a six cubiques gauches passant par cinq points et osculatrices à un plan donné. Les six points de contact sont sur une même conique.